

**ДЕПАРТАМЕНТ ОБРАЗОВАНИЯ ГОРОДА МОСКВЫ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ГОРОДА МОСКВЫ
«ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ №50 ИМЕНИ ДВАЖДЫ ГЕРОЯ
СОЦИАЛИСТИЧЕСКОГО ТРУДА Н.А.ЗЛОБИНА»**

Системы линейных уравнений в решении экономических задач

Автор: Коновалова Дарья Сергеевна,
студентка группы ДЛ-208П

Руководитель: Седова Елена Геннадьевна,
преподаватель математики

**Москва
2018**

Содержание

	Стр.
Введение	3
Глава 1. Методы решения систем линейных уравнений	4
1.1. Системы линейных уравнений	4
1.2. Решение системы линейных уравнений матричным методом	6
1.3. Решение системы линейных уравнений методом Крамера	8
1.4. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса	10
Глава 2. Использование систем линейных уравнений в решении экономических задач	13
Заключение	18
Список литературы	20
Приложения	21

Введение

Математика – наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира. Она является не только мощным средством решения прикладных задач и универсальным языком науки, но и элементом общей культуры. Без современной математики с ее развитым логическим и вычислительным аппаратом был бы невозможен прогресс в различных областях человеческой деятельности. В настоящее время математика служит фундаментом экономических исследований.

Математические модели в экономике представляют формализованное описание управляемого экономического процесса, включающее известные параметры, неизвестные величины, объединенные между собой связями в виде математических зависимостей, формул. Процесс решения экономических задач включает этапы:

1. Содержательная (экономическая) постановка задачи. Выполняется четкая формулировка задачи, определяются объекты, относящиеся к решаемой задаче, ситуация, которую нужно реализовать в результате ее решения.

2. Математическая постановка задачи. Осуществляется построение математической модели объекта и определение методов (алгоритмов) получения решения задачи.

Знание математических методов и умение применять их на практике необходимы каждому специалисту в области экономики.

В представленной работе проводится исследование теоретических основ и практических результатов применения различных методов решения систем линейных алгебраических уравнений в задачах экономического содержания.

Актуальность данного исследования заключается не только в приобретении новых математических знаний в процессе выполнении работы, но и в овладении определенными компетенциями, позволяющими использовать математический аппарат для решения прикладных экономических задач.

Гипотеза: математическими методами можно решать экономические задачи.

Цель работы: изучение методов решения систем линейных уравнений и определение эффективности их использования в решении экономических задач.

Задачи работы:

- изучить теоретические основы основных методов решения систем линейных уравнений;
- рассмотреть примеры решения систем линейных уравнений изученными методами;
- рассмотреть практические задачи экономического содержания, сводящиеся к составлению и решению систем линейных уравнений;
- определить эффективность использования изученных методов решения систем линейных уравнений в экономических задачах.

Предмет исследования: способы и алгоритмы решения систем линейных алгебраических уравнений.

Методы исследования: теоретическое изучение материала и практическое решение задач.

Глава 1. Методы решения систем линейных уравнений

1.1. Системы линейных уравнений

Система m линейных уравнений с n неизвестными записывается в виде:

[illegible]

Обозначения:

$x_1, x_2, \dots, x_n$ – НЕИЗВЕСТНЫЕ;

a_{ij} – коэффициенты при неизвестных (любые действительные числа);

b_i – свободные члены (любые действительные числа).

Решением такой системы называется совокупность значений неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$, которая обращает каждое уравнение системы в тождество.

Если система имеет хотя бы одно решение, то она называется *совместной*.

Если система не имеет ни одного решения, то она называется *несовместной*.

Система называется *определенной*, если она имеет только одно решение.

Система называется **неопределенной**, если она имеет более одного решения.

Две системы уравнений называются равносильными, или эквивалентными, если они имеют одно и то же множество решений.

Система линейных уравнений может быть представлена в виде матричного уравнения $AX=B$, где

A – матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных;

B – матрица-столбец свободных членов;

X – матрица-столбец неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Матрица A называется матрицей системы, а матрица $\tilde{A}$ называется расширенной матрицей системы.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Если $b_1, b_2, \dots, b_m = 0$, то система называется *однородной*.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Однородная система всегда совместна, т.к. всегда имеет нулевое решение.

Частным случаем системы m линейных уравнений с n неизвестными является система, в которой число неизвестных равняется числу уравнений, т. е. система n линейных уравнений с n неизвестными. Она записывается в виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

1.2. Решение системы линейных уравнений матричным методом

Матричный метод используется для решения систем, в которых число неизвестных равняется числу уравнений.

Матричный метод основывается на решении матричных уравнений.

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$:

[illegible]

Составим матрицы: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$

Систему уравнений можно представить в виде матричного уравнения: $AX=B$.

Выполним преобразование: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$, так как $A^{-1} \cdot A = E$, то $E \cdot X = A^{-1} \cdot B$, где A^{-1} – обратная матрица к матрице A , E – единичная матрица.

Решение матричного уравнения $AX=B$ имеет вид: $X=A^{-1} \cdot B$

Чтобы решить матричное уравнение, нужно:

1) Найти обратную матрицу A^{-1} .

2) Найти произведение обратной матрицы A^{-1} на матрицу-столбец свободных членов B , т. е. $A^{-1} \cdot B$.

3) Пользуясь определением равных матриц, записать ответ.

Решим матричным методом систему уравнений $\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$.

Составим матрицы: $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Найдем обратную матрицу A^{-1} .

Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4 - 9) + 1(2 - 12) - 1(3 - 8) = -25 - 10 + 5 = -30.$$

Найдем миноры определителя системы и вычислим элементы обратной матрицы:

$$M_{11} = -5; \quad M_{12} = 10; \quad M_{13} = -5;$$

$$M_{21} = 1; \quad M_{22} = 14; \quad M_{23} = 19;$$

$$M_{31} = -1; \quad M_{32} = 16; \quad M_{33} = 11;$$

$$a_{11}^{-1} = \frac{5}{30}; \quad a_{12}^{-1} = \frac{1}{30}; \quad a_{13}^{-1} = \frac{1}{30};$$

$$a_{21}^{-1} = -\frac{10}{30}; \quad a_{22}^{-1} = -\frac{14}{30}; \quad a_{23}^{-1} = \frac{16}{30};$$

$$a_{31}^{-1} = \frac{5}{30}; \quad a_{32}^{-1} = \frac{19}{30}; \quad a_{33}^{-1} = -\frac{11}{30};$$

Запишем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{10}{30} & -\frac{14}{30} & \frac{16}{30} \\ \frac{5}{30} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 25+10-5 & 5+14-19 & 5-16+11 \\ 5-20+15 & 1-28+57 & 1+32-33 \\ 20-30+10 & 4-42+38 & 4+48-22 \end{pmatrix} = E.$$

Находим матрицу X :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{14}{30} + \frac{16}{30} \\ -\frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{98}{15} + \frac{128}{15} \\ \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{266}{30} - \frac{176}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: (1; 2; 3).

1.3. Решение системы линейных уравнений методом Крамера

Метод Крамера используется для решения систем, в которых число неизвестных равняется числу уравнений.

Теорема Крамера. Система n линейных уравнений с n неизвестными, определитель которой отличен от нуля, всегда имеет решение и притом единственное. Оно находится следующим образом: значение каждого из неизвестных равно дроби, знаменателем которой является определитель системы, а числитель получается из определителя системы заменой столбца коэффициентов при искомом неизвестном на столбец свободных членов.

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$:

[illegible]

Матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных называется матрицей системы, а ее определитель – определителем системы.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad |A| = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Если в определителе системы заменить поочередно столбцы коэффициентов при $x_1, x_2, \dots, x_n$ на столбец свободных членов, то получим n определителей (для n неизвестных).

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}.$$

Если определитель матрицы системы не равен нулю, система имеет единственное решение и это решение находится по формулам:

$$\mathbf{x}_1 = \Delta_1/\Delta, \mathbf{x}_2 = \Delta_2/\Delta, \dots, \mathbf{x}_n = \Delta_n/\Delta.$$

Если определитель матрицы системы равен нулю, то возможны два случая:

1) система не имеет решений, при условии, что хотя бы один из определителей $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ отличен от нуля;

2) система имеет бесконечное множество решений, при условии, что все определители $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ равны нулю.

Рассмотрим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Система имеет единственное решение, определяемое по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}, \quad \text{где } \Delta \neq 0.$$

Определители находятся по формулам:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & b_{33} \end{vmatrix}.$$

Решим методом Крамера систему уравнений
$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}.$$

Вычислим определитель системы и определители при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4 - 9) + (2 - 12) - (3 - 8) = -25 - 10 + 5 = -30;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28 - 48) - (42 - 32) = -20 - 10 = -30;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28 - 48) - (16 - 56) = -100 + 40 = -60;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(32 - 42) + (16 - 56) = -50 - 40 = -90.$$

Найдем x, y, z по формулам Крамера: $x = \Delta_x/\Delta = 1$; $y = \Delta_y/\Delta = 2$; $z = \Delta_z/\Delta = 3$.

Ответ: (1; 2; 3).

1.4. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Метод Гаусса используется для решения систем линейных уравнений с произвольным числом уравнений и неизвестных.

Метод Гаусса заключается в последовательном исключении неизвестных. Пусть дана произвольная система линейных уравнений:

[illegible]

Систему уравнений приведем к эквивалентной ей системе с треугольной или ступенчатой матрицей.

Для этого выпишем матрицу из коэффициентов при неизвестных системы с добавлением столбца свободных членов, т. е. расширенную матрицу системы:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Путем различных последовательных элементарных преобразований (умножение и деление коэффициентов и свободных членов на одно и то же число; сложение и вычитание строк; перестановка строк) приведем матрицу $\tilde{A}$ к треугольному или ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} & \dots & b_{1n} & c_1 \\ & b_{22} & \dots & b_{2r} & \dots & b_{2n} & c_2 \\ & & \dots & & \dots & & \dots \\ & & & b_{ir} & \dots & b_{in} & c_r \end{array} \right) \quad (r \leq n),$$

где все диагональные элементы $b_{11}, b_{22}, \dots, b_{rr}$ отличны от нуля, а элементы, расположенные ниже диагональных, равны нулю. Полученной матрице соответствует более простая система уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1r}x_r + \dots + b_{1n}x_n = c_1, \\ b_{22}x_2 + \dots + b_{2r}x_r + \dots + b_{2n}x_n = c_2, \\ \\ b_{rr}x_r + \dots + b_{rn}x_n = c_r \end{array} \right.$$

Процедуру преобразования исходной системы к треугольному или трапецидальному виду называют **прямым ходом метода Гаусса**.

Если в полученной системе $r = n$, то она имеет треугольный вид. Из последнего уравнения находим x_n , из предпоследнего уравнения находим x_{n-1} и так далее, и, наконец, из первого уравнения находим x_1 .

Описанный процесс называют **обратным ходом метода Гаусса**.

При $r = n$ **система имеет единственное решение**.

Если же $r < n$, то в результате обратного хода r неизвестных можно выразить линейно через остальные $(n - r)$ неизвестных. Эти r неизвестных будут базисными, а остальные $(n - r)$ - свободными. В результате получим общее решение системы. Чтобы получить какое-нибудь частное решение, достаточно придать свободным неизвестным некоторые числовые значения.

При $r < n$ **система имеет бесконечное множество решений**.

Решим методом Гаусса систему уравнений
$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}.$$

Составим расширенную матрицу системы и выполним необходимые преобразования.

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & -11 & -16 & -70 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ -5y - 10z = 40 \\ 6z = 18 \end{cases},$$

откуда получаем: $z = 3$; $y = 2$; $x = 1$.

Ответ: (1; 2; 3).

Выводы к первой главе

1. Матричный метод

Матричный метод применим к решению систем уравнений, где число уравнений равно числу неизвестных.

Метод удобен для решения систем двух или трех уравнений.

Метод основан на решении матричных уравнений.

Для применения данного метода необходимо находить обратную матрицу.

2. Метод Крамера

Метод Крамера применим к решению систем уравнений, где число уравнений равно числу неизвестных.

Метод удобен для решения систем двух или трех уравнений.

Метод основан на вычислении определителей n -го порядка.

Для применения данного метода необходимо находить алгебраические дополнения элементов матрицы.

3. Метод Гаусса

Метод Гаусса используется для решения систем линейных уравнений с произвольным числом уравнений и неизвестных.

Метод удобен для решения систем с большим числом уравнений.

Метод основан на алгебраических преобразованиях.

Общие выводы:

1) Матричный метод и метод Крамера применимы только к тем системам линейных уравнений, в которых число неизвестных равняется числу уравнений.

2) Недостатком матричного метода и метода Крамера является их большая трудоемкость, связанная с нахождением обратной матрицы и вычислением определителей матриц.

3) Метод Гаусса является самым универсальным и наименее трудоемким методом решения систем с произвольным числом линейных уравнений и неизвестных.

4) Достоинством метода Гаусса является то, что он позволяет однозначно установить, совместна система или нет, а в случае совместности найти ее решения (единственное или бесконечное множество).

2. Использование систем линейных уравнений в решении экономических задач

Рассмотрим задачи экономического содержания, приводящие к составлению и решению систем линейных алгебраических уравнений.

Задача 1.

Из некоторого листового материала необходимо выкроить 360 заготовок типа А, 300 заготовок типа Б и 675 заготовок типа В. При этом можно применять три способа раскроя. При первом способе раскроя получается 3 заготовки типа А, 1 заготовка типа Б и 4 заготовки типа В, при втором способе раскроя получается 2 заготовки типа А, 6 заготовок типа Б и 1 заготовка типа В, при третьем способе раскроя получается 1 заготовка типа А, 2 заготовки типа Б и 5 заготовок типа В. Найти расход материала при каждом из указанных способов раскроя.

Решение.

Условие задачи запишем в виде таблицы.

Тип заготовки	Количество заготовок по способам раскроя			Необходимое количество заготовок
	I способ	II способ	III способ	
А	3	2	1	360
Б	2	6	2	300
В	4	1	5	675

Обозначим через x , y , z количество листов материала, раскраиваемых соответственно первым, вторым и третьим способами. Используя данные таблицы запишем систему:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 360, \\ x + 6y + 2z = 300, \\ 4x + y + 5z = 675. \end{cases}$$

Система уравнений – это математическая модель условия выполнения всего задания по заготовкам А, Б и В.

Решить систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными можно любым известным методом (матричным, Крамера, Гаусса).

Матрица системы квадратная, если ее определитель не равен нулю, то данную систему можно решить методом Крамера.

Вычислим определитель матрицы системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 67 \neq 0, \text{ поэтому система имеет единственное решение.}$$

Вычислим Δ_x , Δ_y , Δ_z :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 360 & 2 & 1 \\ 300 & 6 & 2 \\ 675 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 6030,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 360 & 1 \\ 1 & 300 & 2 \\ 4 & 675 & 5 \end{vmatrix} = 1005,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 360 \\ 1 & 6 & 300 \\ 4 & 1 & 675 \end{vmatrix} = 4020.$$

Найдем x , y , z по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{6030}{67} = 90,$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{1005}{67} = 15,$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{4020}{67} = 60.$$

Ответ: будет израсходовано 90 листов материала при первом способе раскроя, 15 листов материала при втором способе раскроя и 60 листов материала при третьем способе раскроя.

Задача 2.

Известно, что вклад, находящийся в банке с начала года, возрастает к концу года на определенный процент (свой для каждого банка). В начале года $3/8$ вклада, который составляет 800 тыс. руб., вложили в первый банк, $1/8$ во второй банк и оставшуюся часть вклада в третий банк. К концу года сумма этих вкладов стала равна 907 тыс. руб. Если бы первоначально $1/8$ вклада положили в первый банк, $4/8$ вклада — во второй банк, оставшуюся часть вклада — в третий банк, то к концу года сумма этих вкладов стала бы равна 894 тыс. руб. Если бы $4/8$ вклада вложили в первый банк, $3/8$ вклада — во второй банк, оставшуюся часть вклада — в третий банк, то к концу года сумма этих вкладов была бы равна 903 тыс. руб. Какой процент начисляет каждый банк?

Решение.

Введем следующие обозначения:

x_1 — процент, начисляемый вкладчику в первом банке;

x_2 — процент, начисляемый вкладчику во втором банке;

x_3 — процент, начисляемый вкладчику в третьем банке.

Вклад в первый банк составил $(3/8) \cdot 800 = 300$ тыс. руб.

Вклад во второй банк составил $(1/8) \cdot 800 = 100$ тыс. руб.

Вклад в третий банк составил $(4/8) \cdot 800 = 400$ тыс. руб.

Начислено в первом банке за год $300 \cdot \frac{x_1}{100} = 3x_1$ тыс. руб.

Начислено во втором банке за год $100 \cdot \frac{x_2}{100} = x_2$ тыс. руб.

Начислено в третьем банке за год $400 \cdot \frac{x_3}{100} = 4x_3$ тыс. руб.

Всего на вклад в 800 тыс. руб., сделанный в три банка (в первый — 300 тыс. руб., во второй — 100 тыс. руб., в третий — 400 тыс. руб.), было начислено за год: $907 - 800 = 107$ тыс. руб.

Таким образом, первое уравнение системы:

$$3x_1 + x_2 + 4x_3 = 107.$$

Аналогично получим два других уравнения системы:

$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 894 - 800 = 94,$$

$$4x_1 + 3x_2 + x_3 = 903 - 800 = 103.$$

Получим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 107 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 94 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 103 \end{cases}$$

Решим эту систему методом Гаусса. Выпишем расширенную матрицу A данной системы и приведем ее к ступенчатому виду. Для удобства решения переставим местами 1-ую и 2-ую строки. Последовательно умножим первую строку на (-3) и прибавим ее ко второй строке, затем умножим на (-4) и прибавим к третьей строке. Элементы второй строки умножим на $(-3/11)$ и прибавим к элементам 3-ей строки. Вторую строку умножим на (-1) , а третью на $(-11/56)$, получим:

$$\begin{aligned} A &= \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 4 & 107 \\ 1 & 4 & 3 & 94 \\ 4 & 3 & 1 & 103 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 94 \\ 3 & 1 & 4 & 107 \\ 4 & 3 & 1 & 103 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 94 \\ 0 & -11 & -5 & -175 \\ 0 & -13 & -11 & -273 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 94 \\ 0 & -11 & -5 & -175 \\ 0 & 0 & -\frac{56}{11} & -\frac{728}{11} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 94 \\ 0 & 11 & 5 & 175 \\ 0 & 0 & 1 & 13 \end{array} \right). \end{aligned}$$

При обратном ходе преобразований к элементам второй строки прибавим элементы третьей, умноженные на (-5) , также к элементам первой строки прибавим элементы третьей, умноженные на (-3) . Умножим элементы второй строки на $(-1/11)$, затем к элементам первой строки прибавим элементы второй, умноженные на (-4) , получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 94 \\ 0 & 11 & 5 & 175 \\ 0 & 0 & 1 & 13 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 55 \\ 0 & 11 & 0 & 110 \\ 0 & 0 & 1 & 13 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 55 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 13 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 13 \end{array} \right).$$

Система имеет единственное решение: $x_1 = 15$, $x_2 = 10$, $x_3 = 13$.

Ответ: первый банк выплачивает 15% годовых, второй банк — 10% годовых, а третий банк — 13% годовых.

Задача 3.

Предприятие выпускает три вида продукции, используя сырье трех типов. Сведения о расходе сырья для каждого вида продукции и запаса сырья каждого типа представлены в таблице. Требуется определить план выпуска каждого вида продукции при условии использования всего имеющегося в запасе сырья.

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, ед./изд.			Запас сырья, ед.
	Π_1	Π_2	Π_3	
C_1	6	4	5	2400
C_2	4	3	1	1450
C_3	5	2	3	1550

Решение.

Обозначим через x , y , z план выпуска соответственно первого, второго и третьего вида продукции.. Используя данные таблицы запишем систему:

$$\begin{cases} 6x + 4y + 5z = 2400, \\ 4x + 3y + z = 1450, \\ 5x + 2y + 3z = 1550. \end{cases}$$

Решим систему уравнений матричным способом.

Составим матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2400 \\ 1450 \\ 1550 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу A^{-1} .

Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -21 \neq 0, \text{ поэтому система имеет единственное решение.}$$

Найдем миноры определителя системы и вычислим элементы обратной матрицы:

$$M_{11} = 7; \quad M_{12} = 7; \quad M_{13} = -7;$$

$$M_{21} = 2; \quad M_{22} = -7; \quad M_{23} = -8;$$

$$M_{31} = -11; \quad M_{32} = -14; \quad M_{33} = 2;$$

$$a_{11}^{-1} = -\frac{7}{21}; \quad a_{21}^{-1} = \frac{7}{21}; \quad a_{31}^{-1} = \frac{7}{21};$$

$$a_{12}^{-1} = \frac{2}{21}; \quad a_{22}^{-1} = \frac{7}{21}; \quad a_{32}^{-1} = -\frac{8}{21};$$

$$a_{13}^{-1} = \frac{11}{21}; \quad a_{23}^{-1} = -\frac{14}{21}; \quad a_{33}^{-1} = -\frac{2}{21}.$$

Запишем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{21} & \frac{2}{21} & \frac{11}{21} \\ \frac{7}{21} & \frac{7}{21} & -\frac{14}{21} \\ \frac{7}{21} & -\frac{8}{21} & -\frac{2}{21} \end{pmatrix}$$

Найдем матрицу X :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -\frac{7}{21} & \frac{2}{21} & \frac{11}{21} \\ \frac{7}{21} & \frac{7}{21} & -\frac{14}{21} \\ \frac{7}{21} & -\frac{8}{21} & -\frac{2}{21} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2400 \\ 1450 \\ 1550 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 250 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Система имеет решение: $x = 150$; $y = 250$; $z = 100$.

Ответ: план выпуска продукции первого вида 150 ед., продукции второго вида 250 ед., продукции третьего вида 100 ед.

Заключение

В представленной работе проведено исследование теоретических основ и практических результатов применения различных методов решения систем линейных алгебраических уравнений в задачах экономического содержания.

В процессе выполнения работы были решены следующие задачи:

- 1) изучены теоретические основы основных методов решения систем линейных алгебраических уравнений: матричного, Крамера и Гаусса;
- 2) рассмотрены примеры решения систем линейных уравнений изученными методами;
- 3) рассмотрены практические задачи экономического содержания, сводящиеся к составлению и решению систем линейных уравнений;
- 4) определена эффективность использования изученных методов решения систем линейных уравнений в экономических задачах.

Изучив основные методы решения систем линейных алгебраических уравнений, проанализировав их преимущества и недостатки, оценив эффективность их использования в экономических задачах, можно сделать следующие **выводы**.

Методы матричный и Крамера имеют определенные алгоритмы решения, основанные на действиях с матрицами и определителями. Данные методы применимы только к тем системам линейных уравнений, в которых число неизвестных равняется числу уравнений. С увеличением числа уравнений системы повышается трудоемкость ее решения, что связано с нахождением обратной матрицы и вычислением определителей матриц.

Метод Гаусса основан на преобразовании расширенной матрицы системы. Данный метод имеет более универсальное применение и используется для систем с произвольным числом линейных уравнений и неизвестных. Он менее трудоемкий по сравнению с матричным методом и методом Крамера.

Для решения систем с большим числом уравнений и неизвестных целесообразно использовать современные вычислительные средства.

Выбор метода решения систем линейных уравнений в прикладных задачах экономического содержания зависит от сложности полученной математической модели.

Если система содержит не более трех уравнений и их число равно числу неизвестных, то для решения системы можно использовать любой из изученных методов.

Если число уравнений системы не равно числу неизвестных, то в этом случае необходимо использовать метод Гаусса.

Рассмотренные практические задачи, сводящиеся к составлению и решению систем линейных уравнений различными способами (матричным, Крамера и Гаусса) подтверждают выдвинутую гипотезу о том, что математическими методами успешно решаются экономические задачи.

Таким образом, задачи выполнены, и поставленная цель исследовательской работы достигнута.

Знания, приобретенные в процессе выполнения работы актуальны, и будут мною использованы для продолжения образования в ВУЗе, а также в будущей профессиональной деятельности.

Список литературы

1. Красс М. С., Чупрынов Б. П. Математика для экономистов: учебное пособие. — СПб.: Питер, 2007. (Серия «Учебное пособие»)
2. Кремер Н. Ш. Высшая математика для экономистов: учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям. — М.:ЮНИТИ-ДАНА, 2010. (Серия «Золотой фонд российских учебников»)
3. Малугин, В. А., Рощина Я. А. Линейная алгебра для экономистов: учебник, практикум и сборник задач для академического бакалавриата — М.: Издательство Юрайт, 2015. (Серия : Бакалавр. Академический курс)
4. Соловейчик И.Л., Лисичкин В.Т. Математика в задачах с решениями: учебное пособие — СПб.: Лань, 2014.

Интернет ресурсы: <http://alexlarin.net/kvm1.html>

1. Матрицы

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов, размера $m \times n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Обозначение a_{ij} коэффициентов матрицы A : индекс i показывает номер строки, в которой находится элемент a_{ij} , индекс j – номер столбца матрицы, который содержит элемент a_{ij} .

Виды матриц.

Если $n \neq m$ матрица называется прямоугольной.

При $n = m$ матрица называется квадратной матрицей порядка n .

Квадратная матрица порядка n имеет вид:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Диагональ квадратной матрицы, идущая из левого верхнего угла в правый угол, принято называть главной диагональю.

Квадратная матрица вида $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется **диагональной**.

Диагональная матрица E вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ называется **единичной**.

Квадратная матрица, у которой элементы, расположенные выше или ниже главной диагонали, равны нулю, называется **треугольной**.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называют **нулевой**. Нулевая матрица не обязательно должна быть квадратной.

Матрицу A^T называют **транспонированной** матрицей A , а переход от A к A^T **транспонированием**, если элементы каждой строки матрицы A записать в том же порядке в столбцы матрицы B .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad B = A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Сложение и вычитание матриц сводится к соответствующим операциям над их элементами. Операции сложения и вычитания определены только для матриц одинакового размера.

Суммой (разностью) матриц является матрица, элементами которой являются соответственно сумма (разность) элементов исходных матриц.

$$\text{Если } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \text{ то}$$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+3 & -1+4 \\ -2-5 & -3+0 \\ 5+1 & 6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -7 & -3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Операция **умножения (деления)** матрицы любого размера на произвольное число сводится к умножению (делению) каждого элемента матрицы на это число.

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Произведением матрицы $A=(a_{ij})$ размера $m \times n$ на матрицу $B=(b_{ij})$ размера $n \times p$ называется матрица $C=(c_{ij})$, элементы которой вычисляются по формуле:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}.$$

Таким образом, элемент c_{ij} матрицы $C=B \cdot A$ равен сумме произведений элементов i -й строки матрицы A на соответствующие элементы j -го столбца матрицы B .

Операция умножения матриц определена только для матриц, **число столбцов первой из которых равно числу строк второй**.

Из определения следует, что матрица $C=B \cdot A$ будет иметь размер $m \times p$.

Например, пусть даны матрицы A размера 2×3 и B размера 3×2 , найдем произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 4 \\ 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 4 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 4 \cdot 4 \\ 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 0 \cdot 3 + 2 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 16 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot 4 + 0 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

2. Определители

Определитель, или **детерминант** квадратной матрицы порядка n имеет обозначения:

$$D = \det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

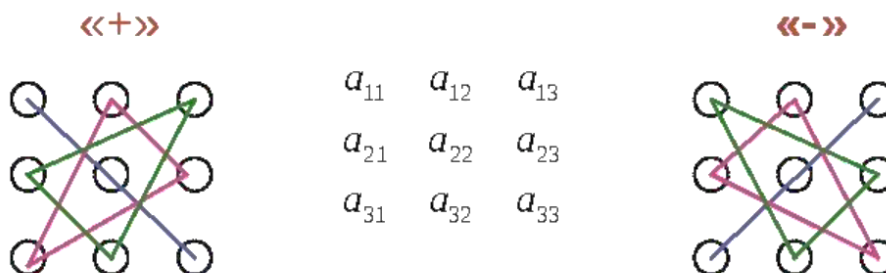
Определитель второго порядка — это число, которое вычисляется по формуле:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Определитель третьего порядка — это число, которое вычисляется по формуле:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Это число представляет алгебраическую сумму, состоящую из 6 слагаемых, или 6 членов определителя. В каждое слагаемое входит ровно по одному элементу из каждой строки и каждого столбца матрицы. Знаки, с которыми члены определителя входят в формулу, легко запомнить, пользуясь схемой, которая называется правилом треугольников или правилом Сарруса.



Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя n -го порядка называется определитель $(n-1)$ -го порядка, полученный из данного определителя вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент. Например, минор M_{12} определителя третьего порядка соответствующий элементу a_{12} получается вычеркиванием первой строки и второго столбца.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя D называется минор M_{ij} этого элемента, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$. Алгебраическое дополнение принято обозначать A_{ij} . Таким образом, $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Разложение определителя третьего порядка по 1-ой строке

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

3. Обратная матрица.

Квадратная матрица A называется **вырожденной**, если ее определитель равен нулю, и **невырожденной**, если ее определитель не равен нулю.

Если A – квадратная матрица, то **обратной** по отношению к A называется матрица, которая при умножении на A (как справа, так и слева), дает единичную матрицу.

Обозначив обратную через A^{-1} , запишем $A^{-1}A = AA^{-1} = E$.

Если обратная матрица A^{-1} существует, то матрица A называется **обратимой**. Операция вычисления обратной матрицы при условии, что она существует, называется **обращением** матрицы. Нахождение обратной матрицы имеет большое значение при решении систем линейных уравнений.

Для того чтобы квадратная матрица A имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы матрица A была невырожденной, т.е. чтобы ее определитель был отличен от нуля.

При условии $D = |A| \neq 0$ обратная матрица находится по формуле:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}/D & A_{21}/D & A_{n1}/D \\ A_{12}/D & A_{22}/D & A_{n2}/D \\ A_{1n}/D & A_{2n}/D & A_{nn}/D \end{pmatrix}$$

Для нахождения обратной матрицы используют следующую схему:

1. Находят определитель матрицы A .
2. Находят алгебраические дополнения всех элементов a_{ij} матрицы A и записывают новую матрицу.
3. Меняют местами столбцы полученной матрицы (транспортируют матрицу).
4. Умножают полученную матрицу на $1/D$.