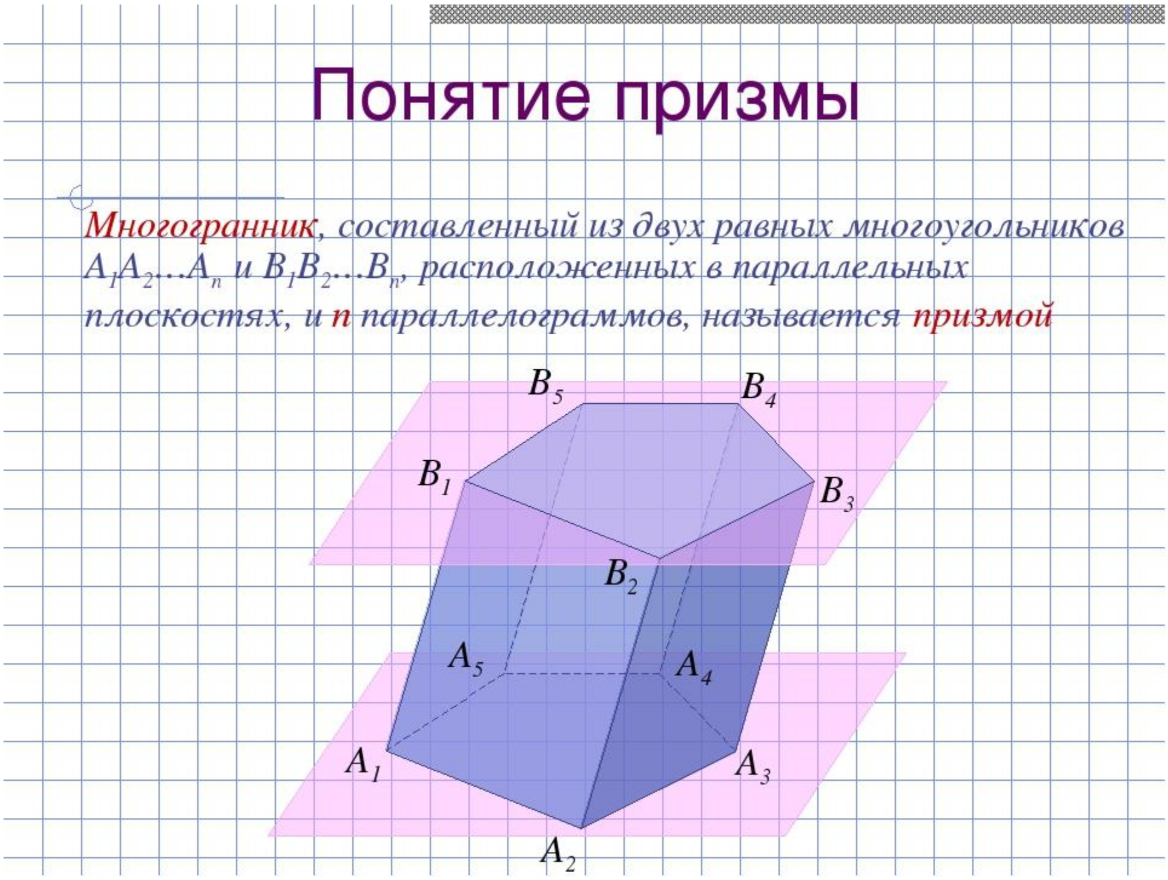
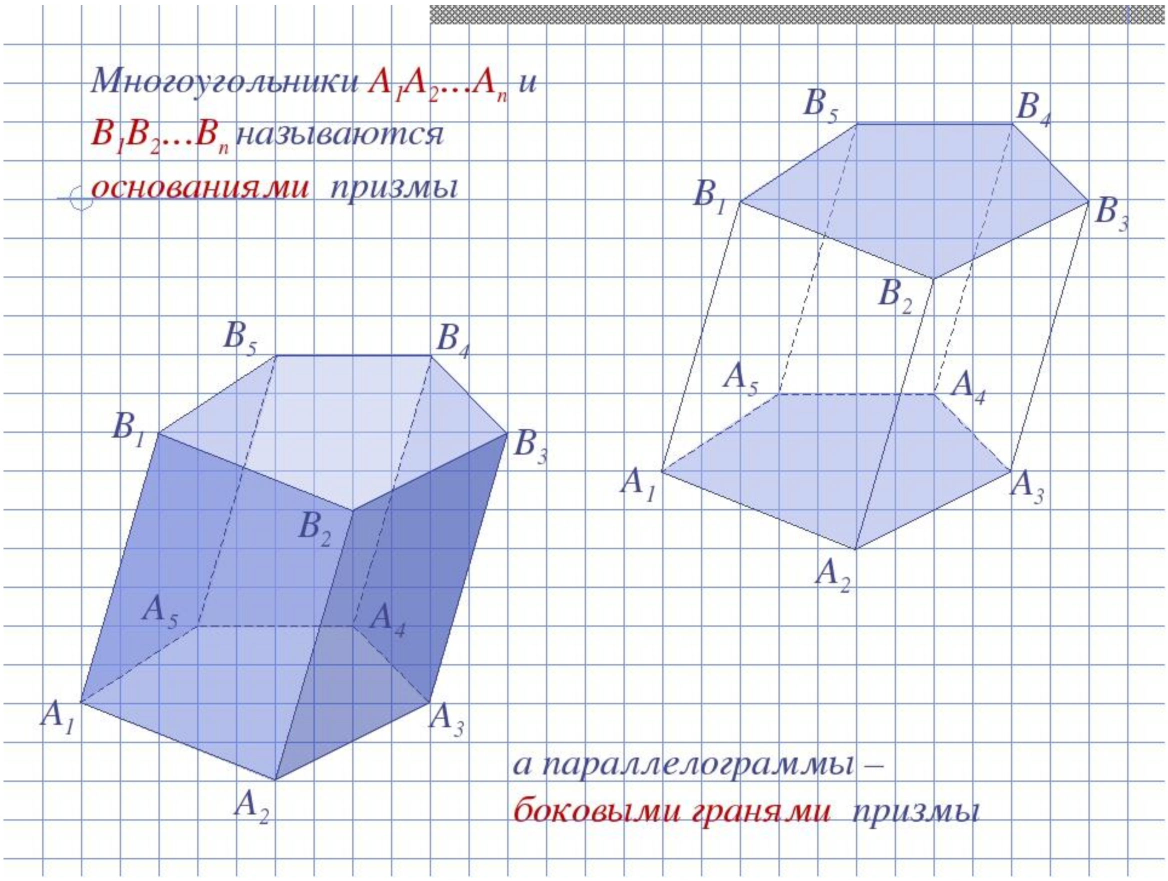
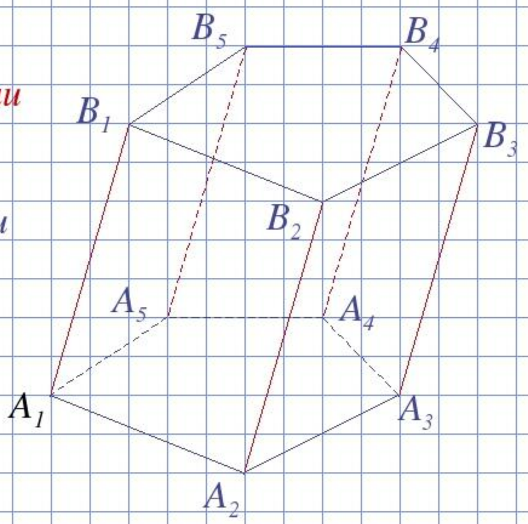
Призма. Площадь поверхности и объём призмы

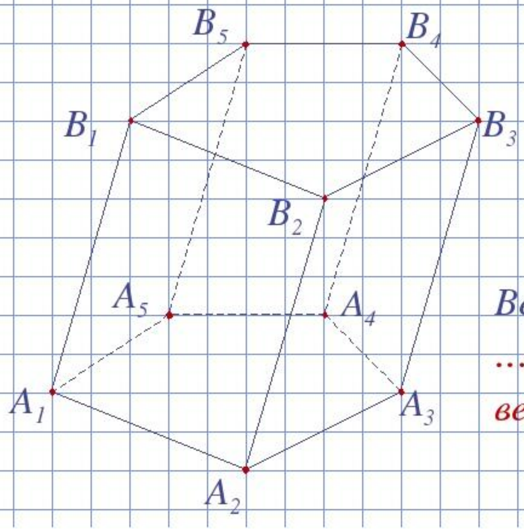




*Отрезки A_1B_1, A_2B_2, … , A_nB_n называются **боковыми ребрами** призмы*

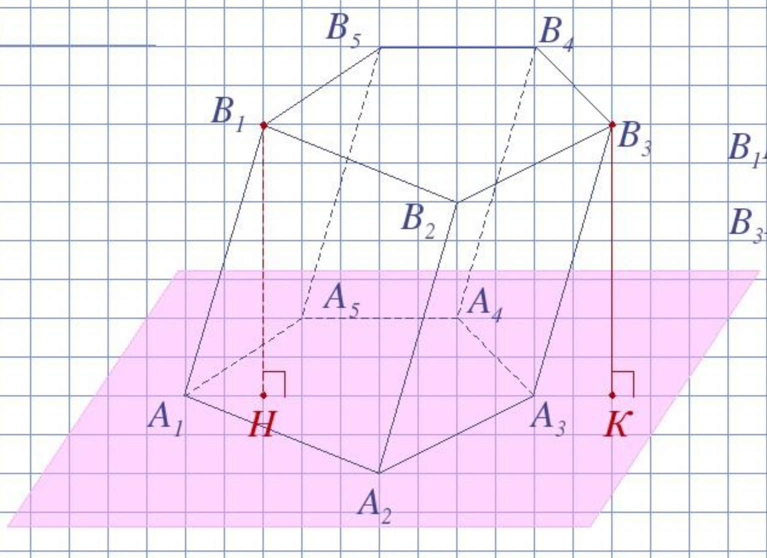


*Боковые ребра призмы **равны** и **параллельны***



*Вершины многоугольников A_1, A_2, …, A_n и B_1, B_2, …, B_n называются **вершинами** призмы*

Высота призмы



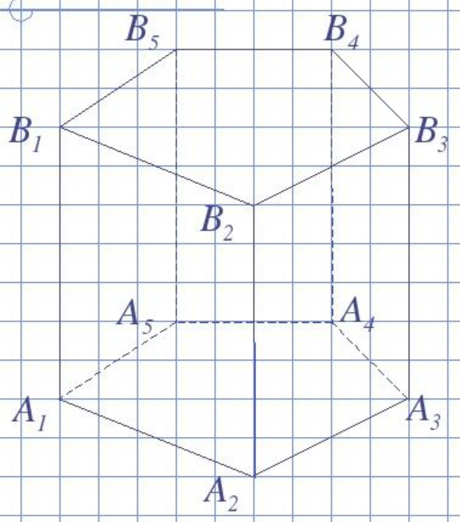
B_1H Ñ$(A_1A_2A_3)$

B_3K Ñ$(A_1A_2A_3)$

*Перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания, называется **высотой** призмы*

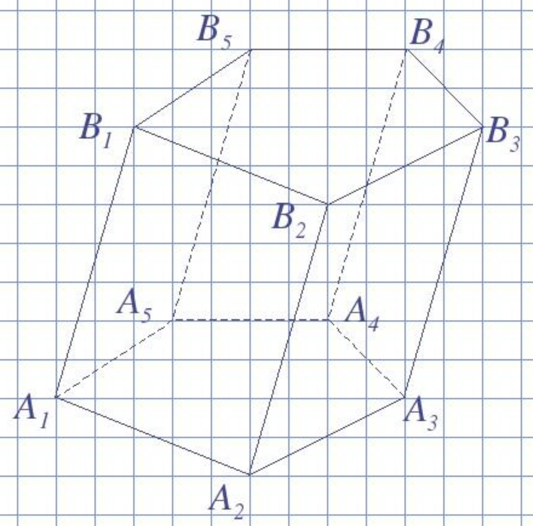
Виды призм

Прямая



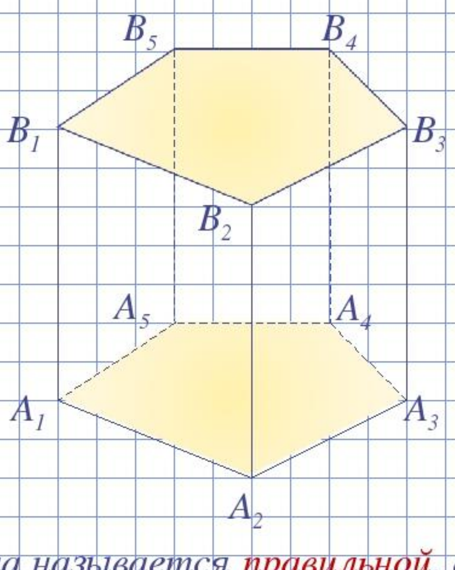
Если боковые ребра призмы перпендикулярны к основаниям, то призма называется ***прямой****,* ***высота*** *– боковое ребро*

Наклонная



в противном случае – ***наклонной****.*

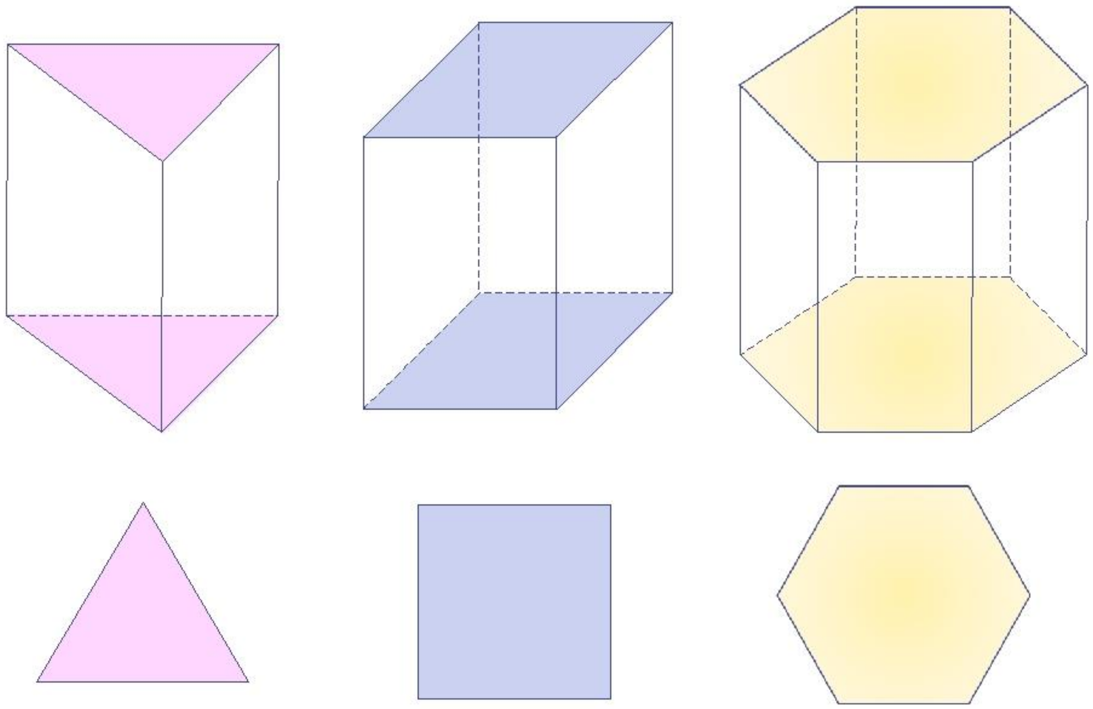
Правильная призма



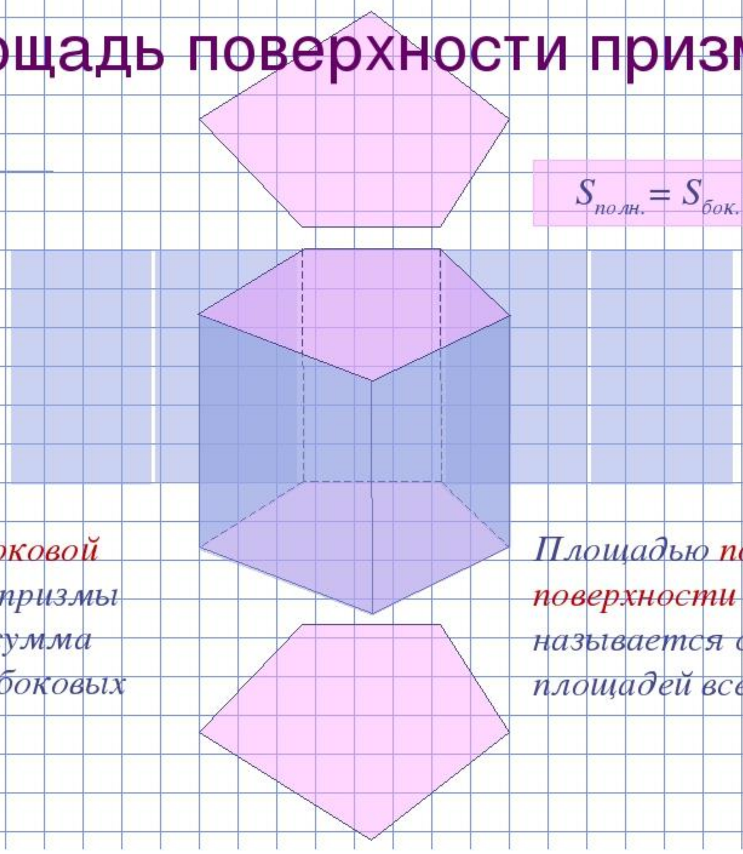
Прямая призма называется ***правильной****, если её основания – правильные многоугольники*

У правильной призмы все боковые грани – равные прямоугольники

Правильные призмы



Площадь поверхности призмы



$$S_{полн.} = S_{бок.} + 2S_{осн.}$$

Площадью боковой поверхности призмы называется сумма площадей её боковых граней

Площадью полной поверхности призмы называется сумма площадей всех её граней

Теорема о площади боковой поверхности прямой призмы

Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы

$$S_{бок.} = P_{осн.} \cdot h$$

Доказательство.

Боковые грани прямой призмы – прямоугольники, основания которых – стороны основания призмы, а высоты равны высоте h призмы.

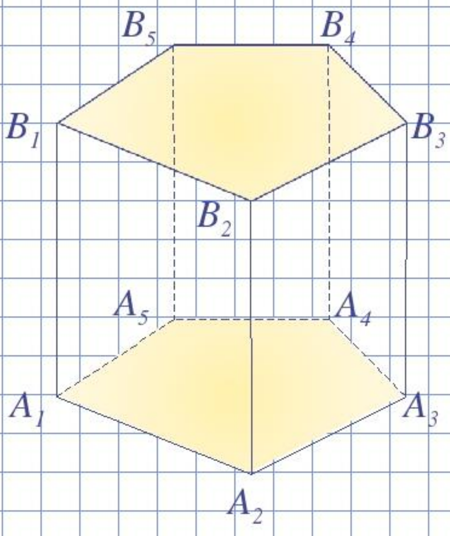
$S_{бок.} = A_1A_2 \cdot h + A_2A_3 \cdot h + A_3A_4 \cdot h + \ldots + A_{n-1}A_n \cdot h =$

$= (A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + \ldots + A_{n-1}A_n) \cdot h = P_{осн.} \cdot h$

Объем призмы

Объем призмы равен произведению площади основания на высоту призмы.

$$V_{призмы} = S_{осн.} \cdot h$$



Примеры решения задач

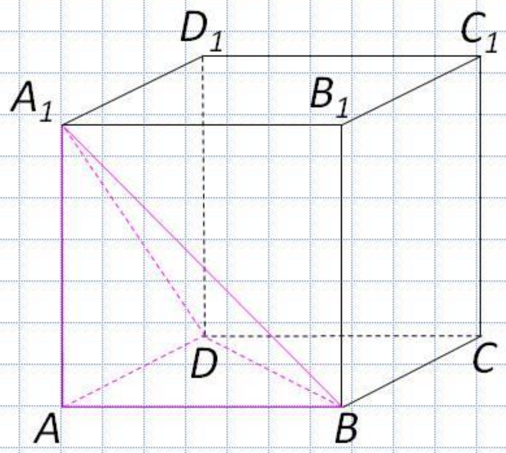
№1 *Найдите объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если объем треугольной пирамиды $ABDA_1$ равен 3.*

1 способ

$$V_{пар-да} = S_{ABCD} \cdot h$$

$$V_{ABDA_1} = \frac{1}{3} S_{ABD} \cdot h$$

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

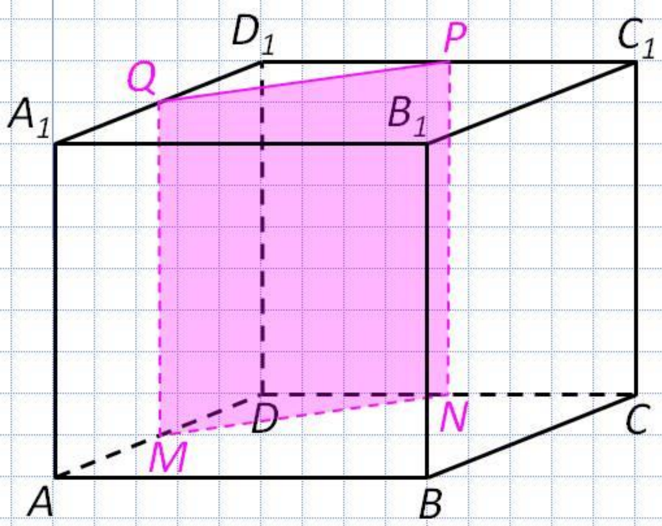


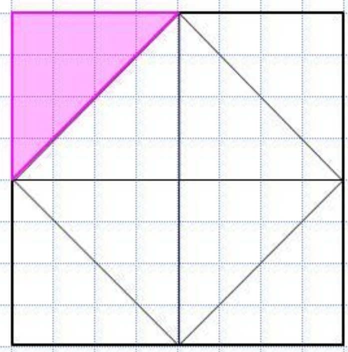
$$V_{ABDA_1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{ABCD} \cdot h = \frac{1}{6} S_{ABCD} \cdot h = \frac{1}{6} V_{пар-да}$$

$$V_{пар-да} = 6S_{ABD} \cdot h = 6V_{ABDA_1} = 6 \cdot 3 = 18$$

Ответ: 18.

№2 *Объем куба равен 12. Найдите объем треугольной призмы, отсекаемой от него плоскостью, проходящей через середины двух ребер, выходящих из одной вершины и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины.*





$$V_{призмы} = \frac{1}{8} S_{ABCD} \cdot h$$

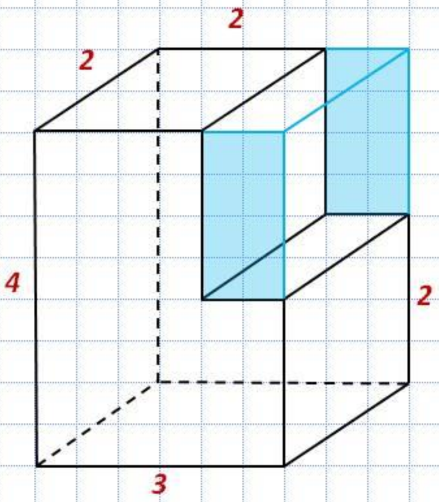
$$V_{призмы} = \frac{1}{8} a^2 \cdot a = \frac{1}{8} a^3$$

$$V_{призмы} = \frac{1}{8} \cdot 12 = 1{,}5$$

Ответ: 1,5.

№3

Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



Решение.

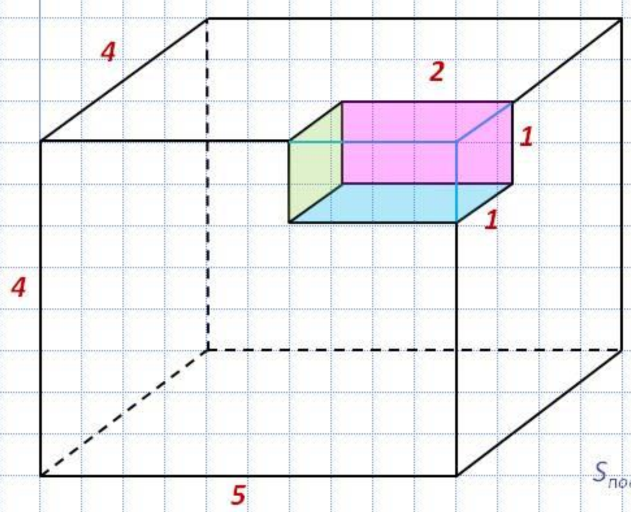
Площадь поверхности заданного многогранника равна разности площади поверхности прямоугольного параллелепипеда с ребрами 4, 3, 2 и двух площадей прямоугольников со сторонами 2, 1 (выделены цветом):

$$S_{пов.} = 2(4 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1) = 48$$

Ответ: 48.

№4

Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



Решение.

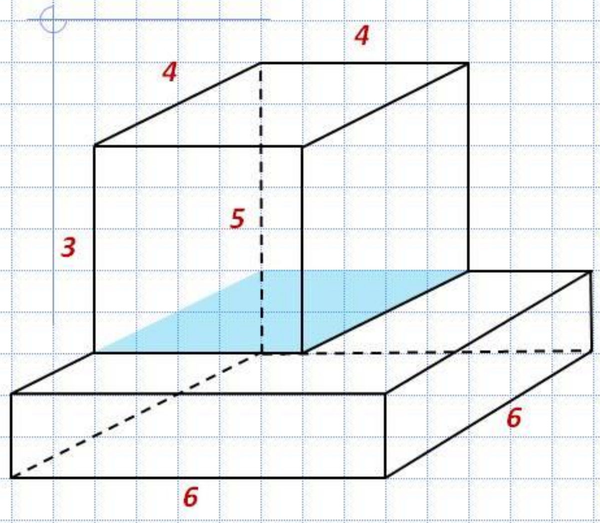
Площадь поверхности данного многогранника равна площади поверхности прямоугольного параллелепипеда с ребрами 4, 5, 4:

$$S_{пов.} = 2(4 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 5) = 112$$

Ответ: 112.

№8

Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



Решение:

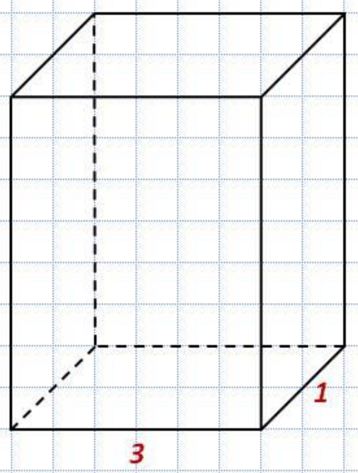
Площадь поверхности заданного многогранника равна сумме площадей большого и маленького параллелепипедов с ребрами 6, 6, 2 и 4, 4, 3, уменьшенной на 2 площади квадрата со сторонами 4, 4 — общей для обоих параллелепипедов, излишне учтенной при расчете площадей поверхности параллелепипедов:

$$S_{пов.} = 2(6\cdot6 + 6\cdot2 + 6\cdot2 + 4\cdot4 + 4\cdot3 + 4\cdot3 - 4\cdot4) = 168$$

Ответ: 168.

№9

Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1 и 3. Площадь поверхности этого параллелепипеда равна 262. Найдите третье ребро, выходящее из той же вершины.



Решение:

Площадь поверхности параллелепипеда равна

$S_{пов.} = 2S_{осн.} + S_{бок.}$

$S_{осн.} = ab = 3 \cdot 1 = 3$

$S_{бок.} = P_{осн.} \cdot h = 2\cdot(3 + 1) \cdot h = 8h$

Имеем, $262 = 2 \cdot 3 + 8h$, откуда найдем третье ребро

$8h = 262 - 6$

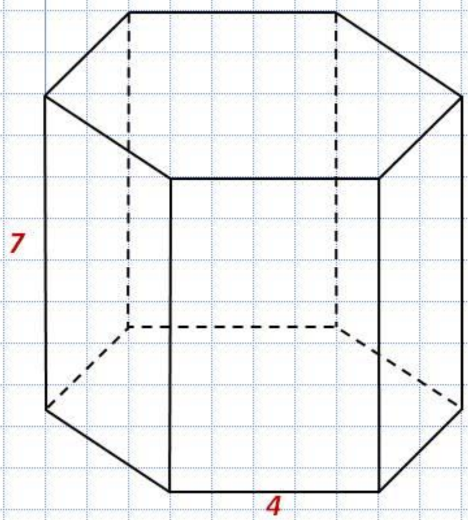
$8h = 256$

$h = 32$

Ответ: 32.

№10

Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, сторона основания которой равна 4, а высота – 7.



Решение:

Площадь боковой поверхности правильной призмы равна

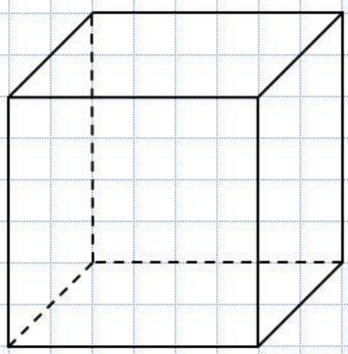
$S_{бок.} = P_{осн.} \cdot h$

$S_{бок.} = 6 \cdot 4 \cdot 7 = 168$

Ответ: 168.

№11

Площадь поверхности куба равна 1682. Найдите его диагональ.



Решение:

Площадь поверхности куба равна

$S_{куба} = 6a^2$

$d^2 = 3a^2$ – *квадрат диагонали куба*

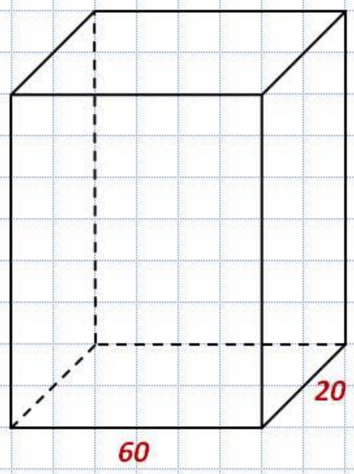
$d^2 = S_{куба}/2 = 1682/2 = 841$

$d = \sqrt{841} = 29$

Ответ: 29.

№12

Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 20 и 60. Площадь поверхности параллелепипеда равна 4800. Найдите его диагональ.



Решение:

Площадь поверхности параллелепипеда равна

$S_{пов.} = 2S_{осн.} + S_{бок.}$

$S_{осн.} = ab = 60 \cdot 20 = 1200$

$S_{бок.} = P_{осн.} \cdot h = 2\cdot(60 + 20) \cdot h = 160h$

Имеем, $4800 = 2 \cdot 1200 + 160h$,

откуда найдем третье ребро

$160h = 4800 – 2400$

$160h = 2400$

$h = 15$

$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

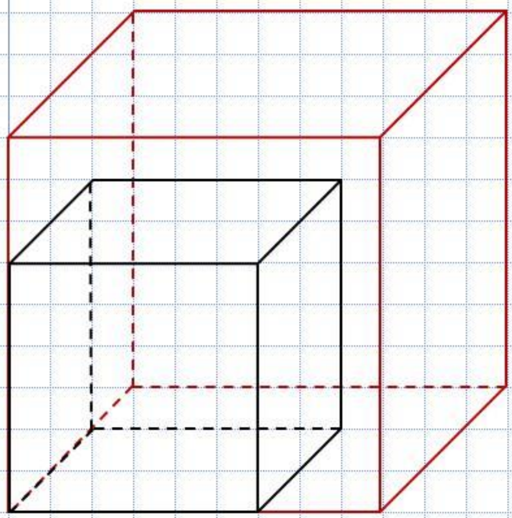
$d^2 = 60^2 + 20^2 + 15^2 = 4225$

$d = 65$ *– диагональ параллелепипеда*

Ответ: 65.

№13

Если каждое ребро куба увеличить на 5, то его площадь поверхности увеличится на 390. Найдите ребро куба.



Решение:

Площадь поверхности куба равна

$S_{1куба} = 6a^2$

Если ребро увеличить на 5, то

$S_{2куба} = 6(a + 5)^2$, *что на 390 больше.*

Откуда имеем, $6(a + 5)^2 – 6a^2 = 390$

Поделив на 6, получим:

$(a + 5)^2 – a^2 = 65$

$(a + 5 – a)(a + 5 + a) = 65$

$5(2a + 5) = 65$

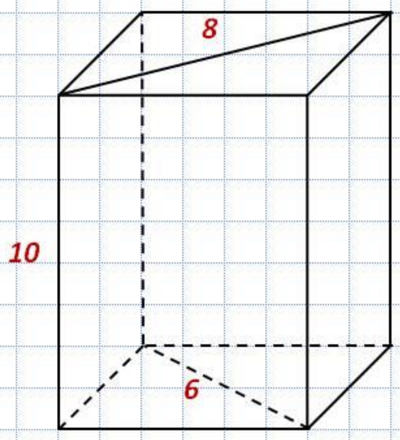
$2a + 5 = 13$

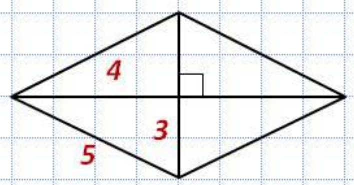
$a = 4$

Ответ: 4.

№14

Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 6 и 8, и боковым ребром, равным 10.





Решение:

Площадь поверхности параллелепипеда равна

$S_{пов.} = 2S_{осн.} + S_{бок.}$

$S_{осн.} = ½\, d_1 \cdot d_2 = ½ \cdot 6 \cdot 8 = 24$

$S_{бок.} = P_{осн.} \cdot h = 4 \cdot 5 \cdot 10 = 200.$

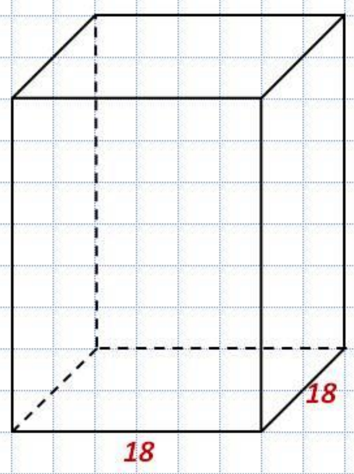
Где сторону основания нашли по теореме Пифагора, т.к. диагонали ромба перпендикулярны.

$S_{пов.} = 2 \cdot 24 + 200 = 248.$

Ответ: 248.

№15

Найдите боковое ребро правильной четырехугольной призмы, если сторона ее основания равна 18, а площадь поверхности равна 1368.



Решение:

Площадь поверхности параллелепипеда равна

$S_{пов.} = 2S_{осн.} + S_{бок.}$

$S_{осн.} = a^2 = 18^2 = 324$

$S_{бок.} = P_{осн.} \cdot h = 4 \cdot 18 \cdot h = 72h.$

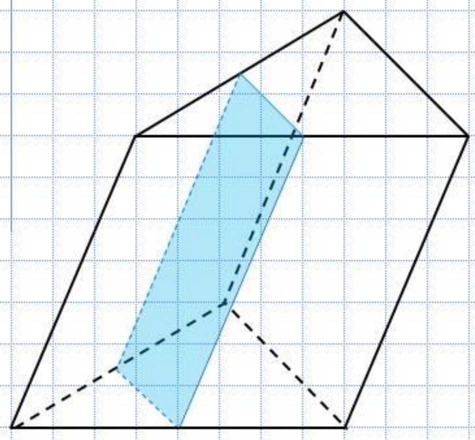
$1368 = 2 \cdot 324 + 72h$

Откуда, $72h = 1368 – 648$

$h = 10.$

Ответ: 10.

№16 ***Через среднюю линию основания треугольной призмы, площадь боковой поверхности которой равна 98, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности отсеченной треугольной призмы.***



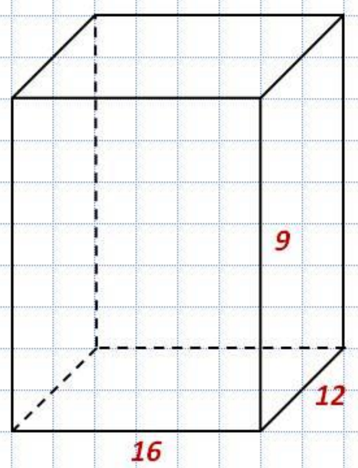
Решение:

Площадь боковых граней отсеченной призмы вдвое меньше соответствующих площадей боковых граней исходной призмы. Поэтому площадь боковой поверхности отсеченной призмы вдвое меньше площади боковой поверхности исходной.

$S_{бок.} = 98/2 = 49.$

Ответ: 49.

№17 ***Три ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 12, 16 и 9. Найдите ребро равновеликого ему куба.***



Решение:

Равновеликие тела имеют равные объемы

$V_{пар\text{-}да} = abc = 9 \cdot 12 \cdot 16 = 1728$

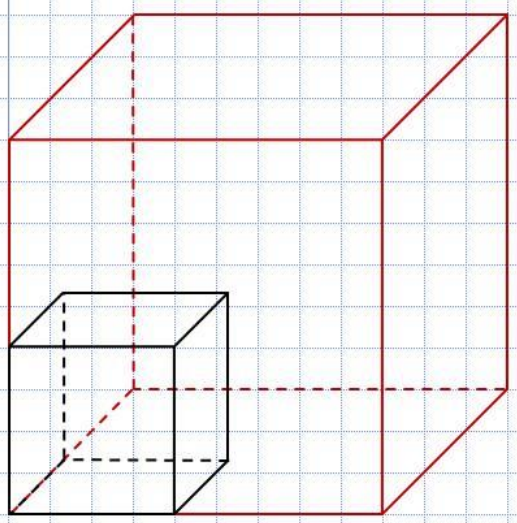
$V_{куба} = a^3 = 1728$

$a = 12.$

Ответ: 12.

№18

Во сколько раз увеличится площадь поверхности куба, если его ребро увеличить в 12 раз?



Решение:

Площадь поверхности куба равна

$S_{1куба} = 6a^2$

Если ребро увеличить в 12 раз, то

$S_{2куба} = 6(12 \cdot a)^2 = 6 \cdot 144 \cdot a^2$.

Откуда имеем,

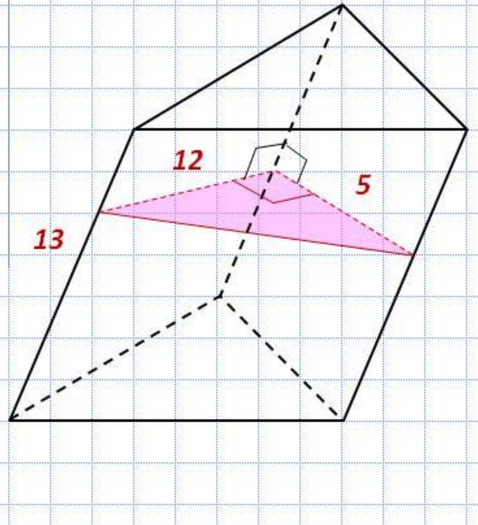
$S_{2куба} / S_{1куба} = (6 \cdot 144 \cdot a^2)/(6 \cdot a^2)$

$S_{2куба} / S_{1куба} = 144$.

Ответ: 144.

№19

В треугольной призме две боковые грани перпендикулярны. Их общее ребро равно 13 и отстоит от других боковых ребер на 12 и 5. Найдите площадь боковой поверхности этой призмы.



Решение:

Площадь боковой поверхности призмы равна

$S_{бок.} = P_{\perp} \cdot l$,

где l *– длина бокового ребра,*

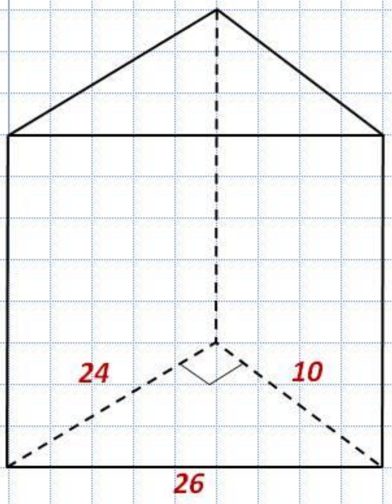
а $P_{\perp}$ *– площадь перпендикулярного сечения призмы (п/у Δ со сторонами 15, 36 и 39)*

$S_{бок.} = (5 + 12 + 13) \cdot 13 = 390$.

Ответ: 390.

№20

Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 10 и 24. Площадь ее поверхности равна 1680. Найдите высоту призмы.



Решение:

Площадь поверхности призмы равна

$S_{пов.} = 2S_{осн.} + S_{бок.}$

$S_{осн.} = ½\ ab = ½ \cdot 10 \cdot 24 = 120$

$S_{бок.} = P_{осн.} \cdot h = (24 + 10 + 26) \cdot h = 60h$

Гипотенузу п/у ∆ находим по теореме Пифагора, она рана 26.

Имеем, $1680 = 2 \cdot 120 + 60h$, откуда найдем высоту призмы

$60h = 1680 – 240$

$60h = 1440$

$h = 24.$

Ответ: 24.

Решение задач из учебника

Задача 219.

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, $AB=12$ см, $AD=5$ см, $(\widehat{D_1B,\ ABC})=45°$.

Найти DD_1.

Решение.

1) Из $\triangle ABD$ имеем $BD = \sqrt{AB^2+AD^2}$, $BD=\sqrt{12^2+5^2}$ см $=\sqrt{169}$ см $=13$ см (рис. 3.1).

2) $D_1D \perp ADC$, BD — проекция диагонали BD_1 на плоскость ADC, поэтому $\angle D_1BD$ — угол между диагональю BD_1 и плоскостью основания: $\angle D_1BD = 45°$. $\triangle D_1BD$ прямоугольный и равнобедренный: $D_1D = DB = 13$ см.

Ответ: 13 см.

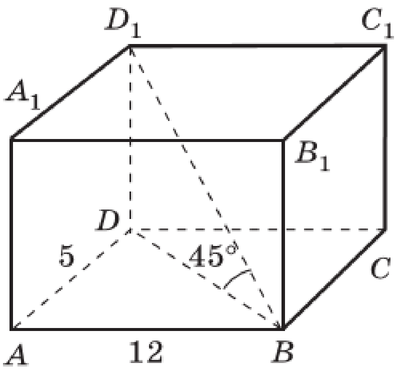


Рис. 3.1

Задача 223. Через два противоположных ребра куба проведено сечение, площадь которого равна $64\sqrt{2}$ см^2. Найдите ребро куба и его диагональ.

Решение.

1) Пусть $AB = BC = a$, тогда $BC_1 = a\sqrt{2}$.

2) $BA \perp AD$ и $BA \perp AA_1$, следовательно, BA перпендикулярно к плоскости грани ADD_1A_1, и поэтому $BA \perp AD_1$ (рис. 3.2).

Сечение ABC_1D_1 — прямоугольник. $S_{ABC_1D_1} = AB \cdot BC_1$, т. е. $a \cdot a\sqrt{2} = 64\sqrt{2}$ см^2, откуда $a^2 = 64$ см^2, $a = 8$ см.

3) $BD_1^2 = 3a^2$ (по теореме о квадрате диагонали прямоугольного параллелепипеда), $BD_1^2 = 3 \cdot 8^2$ см^2, $BD_1 = 8\sqrt{3}$ см.

Ответ: $AB = 8$ см, $BD_1 = 8\sqrt{3}$ см.

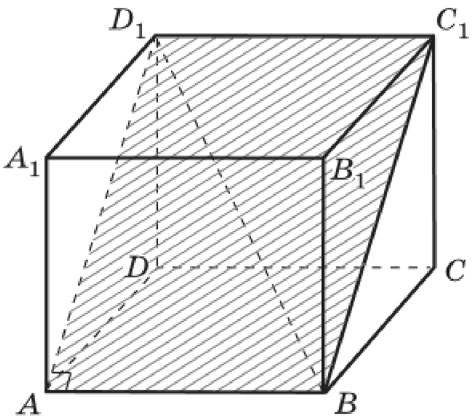


Рис. 3.2

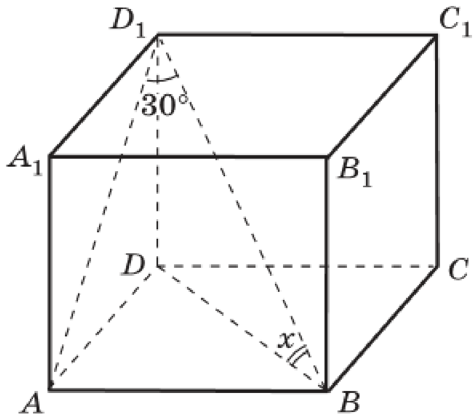


Рис. 3.3

Задача 225.

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырёхугольная призма, $(\widehat{BD_1,\ ADD_1}) = 30°$.

Найти $(\widehat{BD_1,\ ABC})$.

Решение.

1) $AB \perp ADD_1$, следовательно, AD_1 — проекция диагонали BD_1 на плоскость грани ADD_1A_1, поэтому $\angle AD_1B$ — угол между диагональю BD_1 и плоскостью этой грани (рис. 3.3). $\angle AD_1B = 30°$.

2) Отрезок BD — проекция диагонали BD_1 на плоскость основания призмы, поэтому $\angle D_1BD = x$ — искомый угол между диагональю призмы и плоскостью основания.

3) Пусть $AB = a$, тогда $BD = a\sqrt{2}$. Из $\triangle ABD_1$ получаем $BD_1 = 2a$ (по свойству катета, лежащего против угла в 30°).

4) Из $\triangle D_1DB$ имеем $\cos x = \dfrac{BD}{BD_1} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2a} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $x = 45°$.

Ответ: 45°.

Задача 230.

Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма, $AB=5$ см, $BC=3$ см, $\angle ABC=120°$. Наибольшая из площадей боковых граней равна 35 см^2.

Найти $S_{бок}$.

Решение.

1) Из треугольника ABC находим ребро AC по теореме косинусов: $AC^2=AB^2+BC^2-2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos 120°$, $AC^2=25+9-2\cdot5\cdot3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=49$ см^2, $AC=7$ см (рис. 3.4).

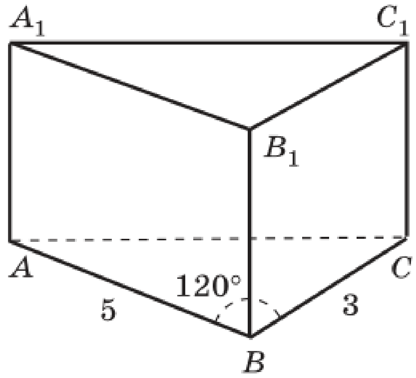


Рис. 3.4

2) Отрезок AC — большая сторона треугольника ABC, следовательно, ACC_1A_1 — большая боковая грань призмы. Поэтому $AC\cdot CC_1=35$ см^2, или $7\cdot h=35$ см^2, откуда $h=5$ см.

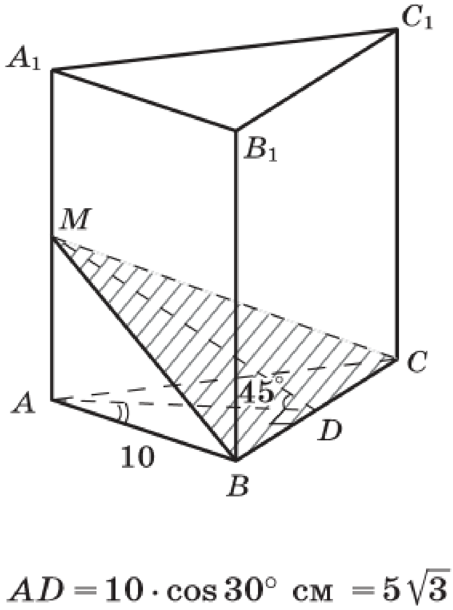
3) $S_{бок}=p\cdot h$,

$S_{бок}=(5+3+7)\cdot5$ см$^2=75$ см^2.

Ответ: 75 см^2.

Задача.

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ через сторону BC основания и середину M бокового ребра AA_1 проведено сечение, составляющее угол 45° с плоскостью основания. Найдите объём призмы, если сторона её основания равна 10 см.



Решение.

1) Из $\triangle ABD$ $AD=10\cdot\cos 30°$ см $=5\sqrt{3}$ см.

2) $\angle MDA=45°$ (объясните почему).

3) В $\triangle MAD$ $AM=AD=5\sqrt{3}$ см.

4) $AA_1=2AM=10\sqrt{3}$ см.

5) $V=S_{ABC}\cdot AA_1=\frac{10^2\sqrt{3}}{4}\cdot10\sqrt{3}$ см$^3=750$ см^3.