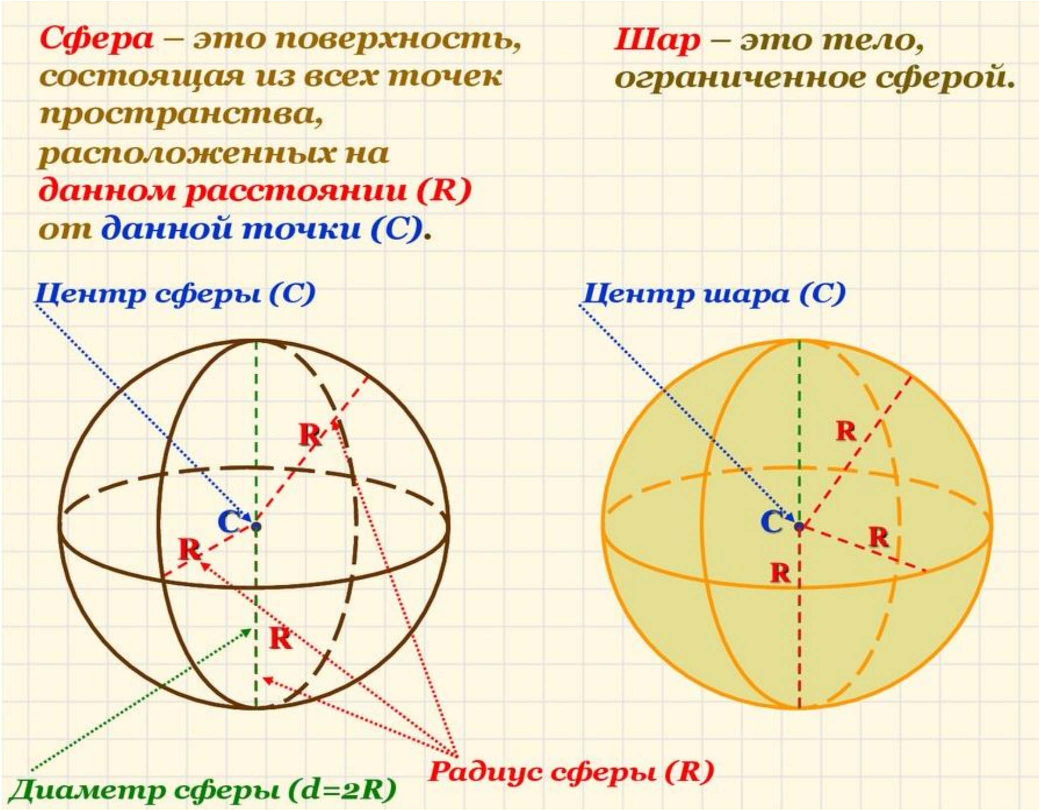
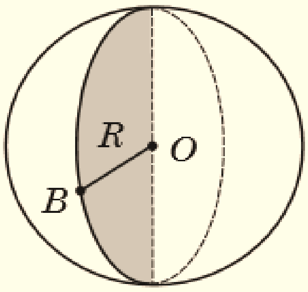
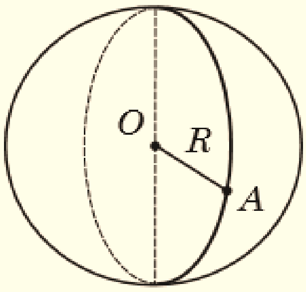
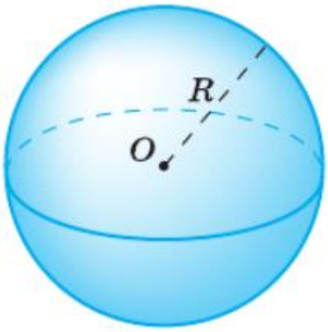
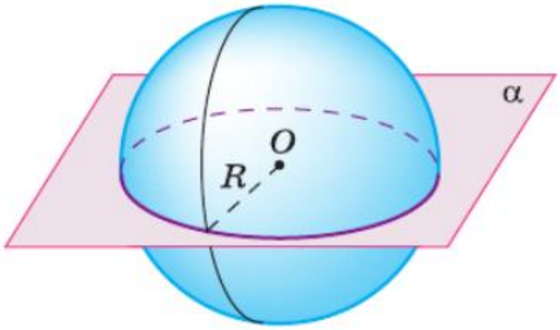
Сфера и шар. Площадь сферы и объём шара



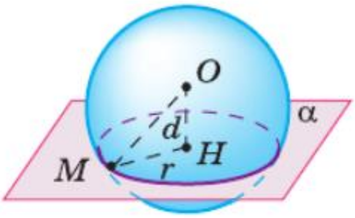
Шар	Сфера
 **Шар** — тело, состоящее из всех точек пространства, находящихся на расстоянии, не большем данного (R) от данной точки (O). O — центр шара; OB — радиус шара; $OB = R$. Шар получается при вращении полукруга вокруг его диаметра. **Объём шара:** $V_{ш} = \frac{4}{3}\pi R^3$	 **Сфера** — тело, которое состоит из всех точек пространства, находящихся на данном расстоянии (R) от данной точки (O). O — центр сферы; OA — радиус сферы; $AO = R$. При вращении полуокружности вокруг её диаметра получаем сферу. **Площадь поверхности сферы:** $S_{сф} = 4\pi R^2$



Сфера
радиуса R
с центром O



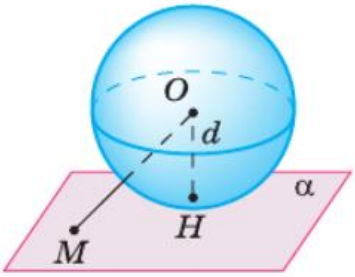
Плоскость α, проходящая через центр O сферы, пересекается со сферой по большой окружности



$OH \perp \alpha,\ OH = d < R,$

$r = \sqrt{R^2 - d^2}.$

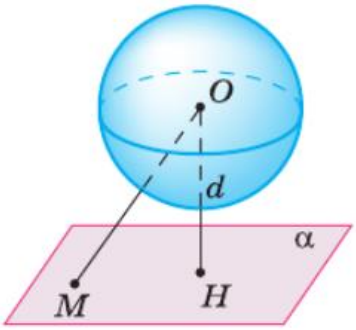
Плоскость α пересекается со сферой по окружности радиуса r



$OH = d = R,$

$OM > OH.$

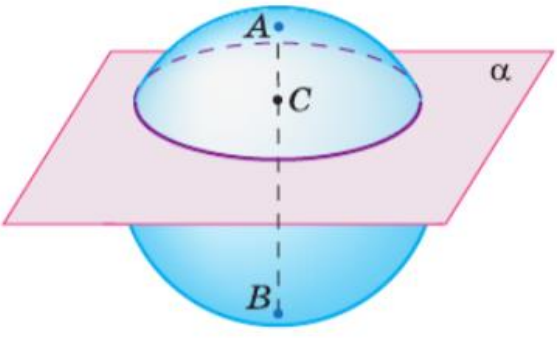
Плоскость α и сфера имеют только одну общую точку



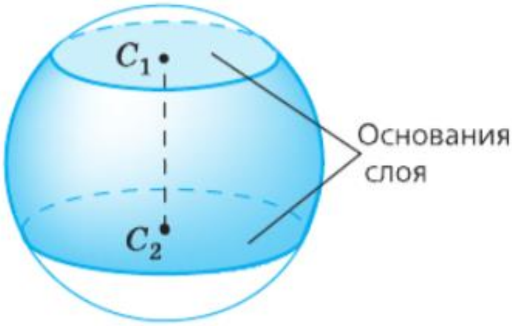
$OH = d > R,$

$OM > OH.$

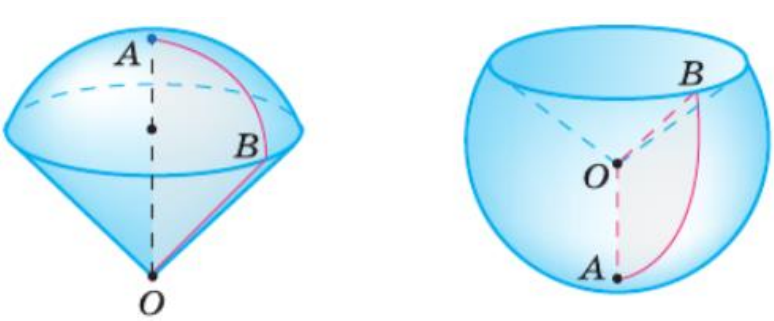
Плоскость α и сфера не имеют общих точек



Плоскость α разделяет шар на два шаровых сегмента



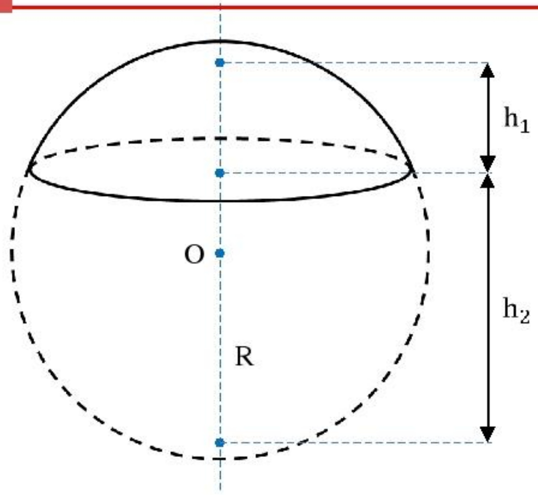
Шаровой слой



Шаровой сектор

Определение

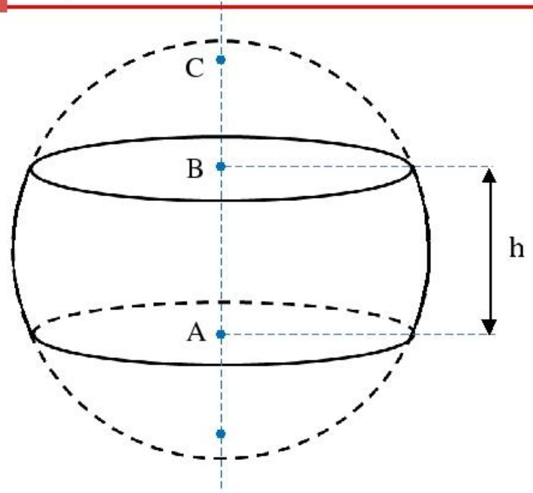
Шаровой сегмент — часть шара, отсекаемая от него какой-нибудь плоскостью.



$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3}h\right)$$

Определение

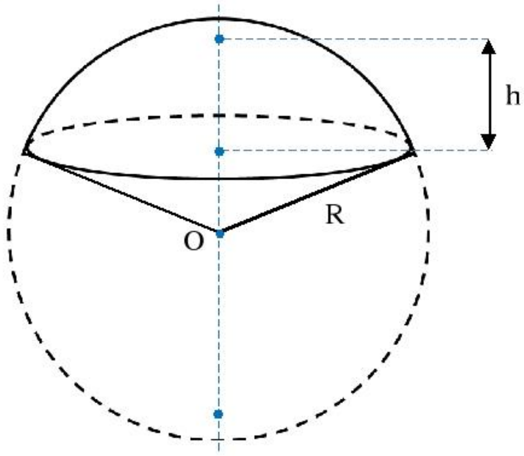
Шаровой слой — часть шара, заключённая между двумя параллельными сечениями.



$$V = V_{\text{сегм.}1} - V_{\text{сегм.}2}$$

Определение

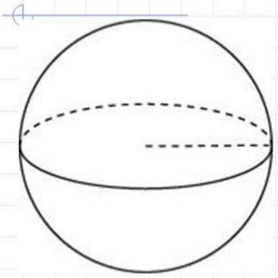
Шаровой сектор — тело, полученное вращением **кругового** сектора с углом, меньшим 90^0, вокруг прямой, содержащей один из ограничивающих сектор радиусов.



$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$$

Примеры решения задач

Во сколько раз увеличится объем шара, если его радиус увеличить в три раза?



Решение.

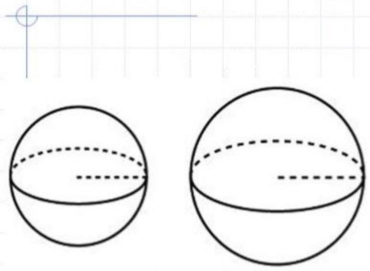
Объем шара радиуса r равен

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

При увеличении радиуса втрое, объем шара увеличится в 27 раз.

Ответ: 27.

Радиусы двух шаров равны 6, 8. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей их поверхностей.



Решение.

Из условия

$$S_3 = S_1 + S_2$$

найдем, что радиус такого шара

$$R_3{}^2 = R_1^2 + R_2^2 \Rightarrow R_3 = \sqrt{R_1^2 + R_2^2} = 10$$

Ответ: 10.

Задача

Дано: шар

R = 41 дм

d = 9 дм

Найти: $S_{сеч.}$

Решение:

1) d < R fl сечение шара плоскостью — круг

$S = \ r^2$, r = AK — радиус круга

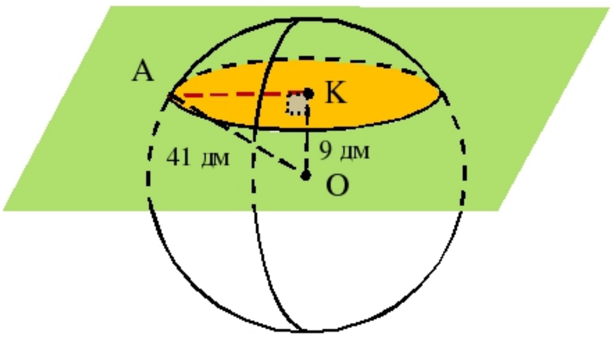
2) ΔAOK — прямоуг. fl

$\Rightarrow AK = \sqrt{AO^2 - OK^2} = \sqrt{41^2 - 9^2} =$

$= \sqrt{1681 - 81} = \sqrt{1600} = 40$ (дм)

3) $S_{сеч.} = \ r^2 = \ \cdot 40^2 = 1600$ (дм²)

Ответ: $S_{сеч.} = 1600$ дм²



Задача

Дано:

шар, O — центр шара

$S_{сеч.} = 16\pi$ см^2

$d = 3$ см

Найти: $S_{сф.}$

Решение:

1) $S = \pi r^2 = 16\pi$, $r = AB$ — радиус круга $\Rightarrow$

$\Rightarrow r = \sqrt{\frac{16\pi}{\pi}} = \sqrt{16} = 4$ (см)

$r = AB = 4$ см

2) $OA = d$ — перпендикуляр от центра шара до сечения $\Rightarrow \angle A = 90°$

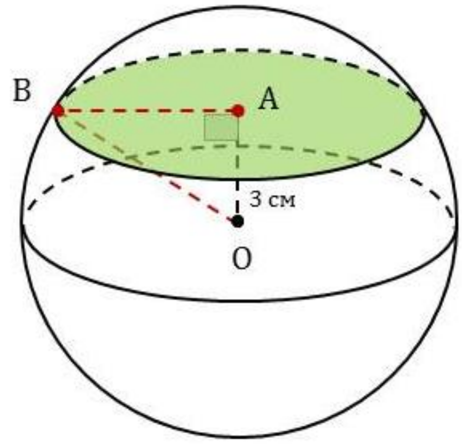
ΔOAB — прямоуг. $\Rightarrow$

$OB = R = \sqrt{AB^2 + OA^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$ (см)

3) $S_{сф.} = 4\pi R^2$, R — радиус сферы

$S_{сф.} = 4\pi \cdot 5^2 = 4\pi \cdot 25 = 100\pi$ (см^2)

Ответ: $S_{сф.} = 100\pi$ см^2



Задача 1.

Дано: шаровой слой

R — радиус шара, $(C, D) \in AB$

AB — диаметр AC = CD = DC

Найти: $V_{шар.\ слоя}$

Решение:

$\boxed{V = V_{шар.\ сегм.1} - V_{шар.\ сегм.2}}$ AB = 2R;

$h_1 = AD$; $h_2 = AC$;

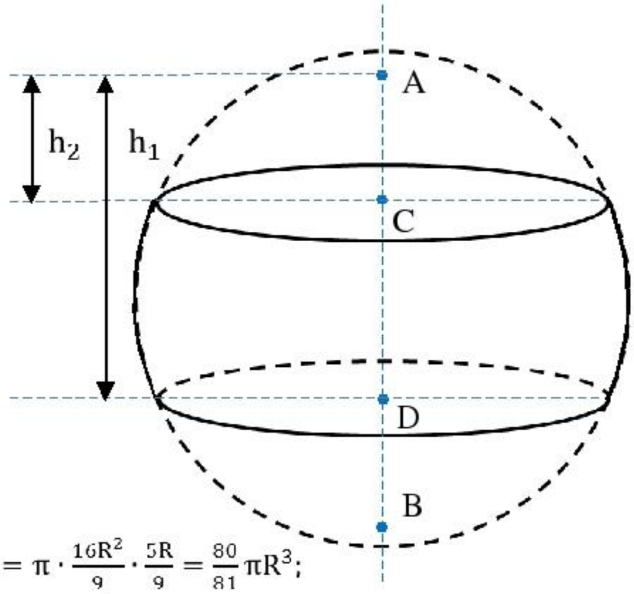
$h_1 = AD = \frac{2}{3}AB = \frac{4}{3}R$; $h_2 = AC = \frac{1}{3}AB = \frac{2}{3}R$;

$\boxed{V = \pi h^2(R - \frac{1}{3}h)}$

$V_{шар.\ сегм.1} = \pi {h_1}^2(R - \frac{1}{3}h_1) = \pi(\frac{4R}{3})^2\ (R - \frac{4R}{3 \cdot 3}) = \pi \cdot \frac{16R^2}{9} \cdot \frac{5R}{9} = \frac{80}{81}\pi R^3$;

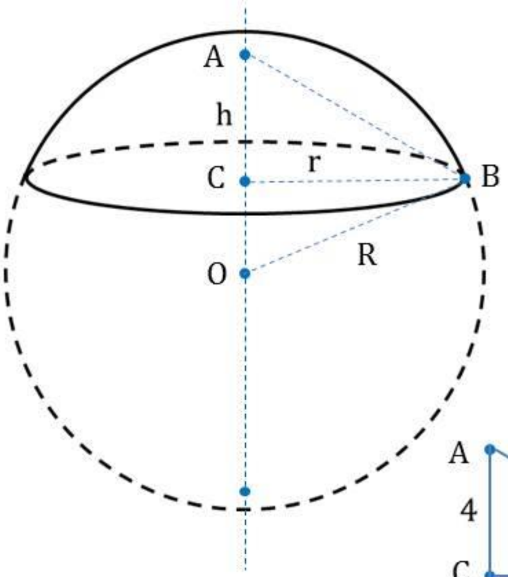
$V_{шар.\ сегм.2} = \pi {h_2}^2(R - \frac{1}{3}h_2) = \pi(\frac{2R}{3})^2\ (R - \frac{2R}{3 \cdot 3}) = \pi \cdot \frac{4R^2}{9} \cdot \frac{7R}{9} = \frac{28}{81}\pi R^3$;

$V = V_{шар.\ сегм.1} - V_{шар.\ сегм.2} = \frac{80}{81}\pi R^3 - \frac{28}{81}\pi R^3 = \frac{52}{81}\pi R^3$.



Ответ: $\frac{52}{81}\pi R^3$.

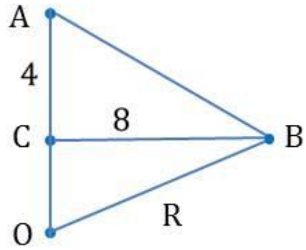
Задача 2.



Дано:
Шаровой сегмент
$r = 8$ см
$h = 4$ см
Найти: $V_{сегм.}$
Решение:

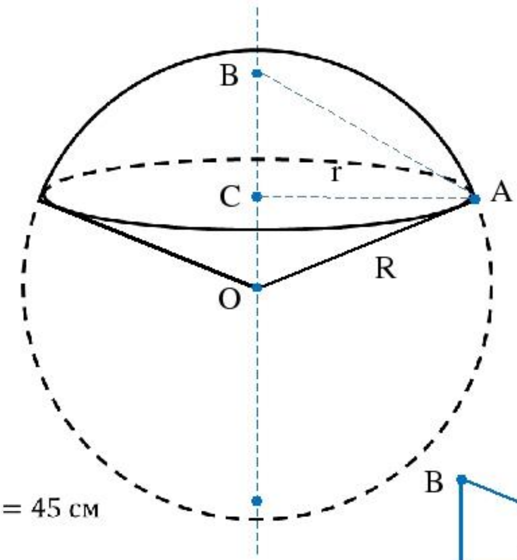
$$\boxed{V = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3}h\right)}$$

$OA = OB = R \Rightarrow OC = R - AC = R - 4;$
ΔBCO — прямоугольный;
$OB^2 = BC^2 + CO^2$
$R^2 = 8^2 + (R-4)^2;$
$R^2 = 64^2 + R^2 - 8R + 16;$
$8R = 80;$
$R = 10;$
$V = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3}h\right) = \pi \cdot 4^2 \left(10 - \frac{4}{3}\right) = \frac{16 \cdot 26}{3}\pi = \frac{416}{3}\pi$ см^3.



Ответ: $\frac{416}{3}\pi$ см^3.

Задача 3.

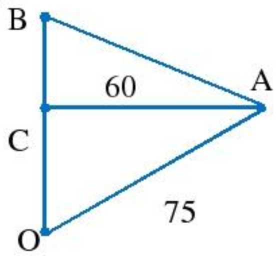


Дано: шаровой сектор
$r = 60$ см
$R = 75$ см
Найти: $V_{шар.\ сект.}$

Решение:

$$\boxed{V = \frac{2}{3}\pi R^2 h}$$

$AO = OB = R$ fl $h = CB = R - CO;$
ΔAOC — прямоугольный;
$CO = \sqrt{AO^2 - AC^2} = \sqrt{75^2 - 60^2} = \sqrt{2025} = 45$ см
$h = R - CO = 75 - 45 = 30$ см
$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h = \frac{2 \cdot 75^2 \cdot 3}{3}\pi = 112500\pi.$



Ответ: $112\,500\pi$ см^3.

Решение задач из учебника

Вершины треугольника ABC лежат на сфере, радиус которой равен 13. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если $AB=6$, $BC=8$, $AC=10$.

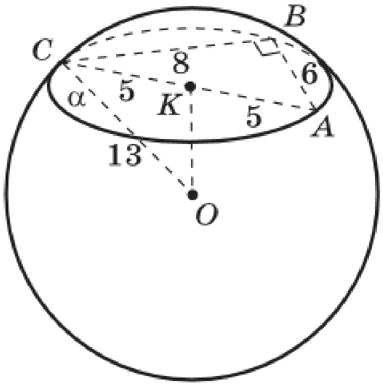


Схема решения.

1. $10^2=6^2+8^2$, $\angle ABC=90°$.

2. $OK\perp\alpha$, K — центр круга, $AK=KC=5$.

3. $OK=\sqrt{13^2-5^2}=12$.

Задача 509. Два равных шара расположены так, что центр одного лежит на поверхности другого. Как относится объём общей части шаров к объёму данного шара?

Решение.

1) Обозначим радиус шара через R, тогда $AC=CB=\frac{R}{2}$ (рис. 5.10). Общая часть шаров состоит из двух равных шаровых сегментов с высотой $h=\frac{R}{2}$.

2) Воспользуемся формулой $V_{\text{сегм}}=\pi h^2\left(R-\frac{1}{3}h\right)$.

При $h=\frac{R}{2}$ получаем $V_{\text{сегм}}=\pi\cdot\frac{R^2}{4}\left(R-\frac{1}{3}\cdot\frac{R}{2}\right)=\frac{5\pi R^3}{24}$.

3) $V_{\text{общей части}}=\frac{5\pi R^3}{12}$; $\frac{V_{\text{общей части}}}{V_{\text{шара}}}=\frac{5}{16}$.

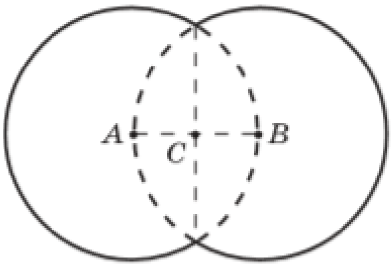


Рис. 5.10