§ 3 Сфера

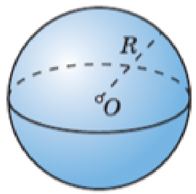
43 Сфера и шар

Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки (рис. 115).

Данная точка называется **центром сферы** (точка O на рисунке 115), а данное расстояние — **радиусом сферы**. Радиус сферы часто обозначают латинской буквой R.

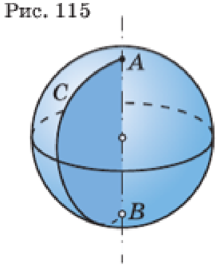
Любой отрезок, соединяющий центр и какую-нибудь точку сферы, также называется радиусом сферы. Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через её центр, называется **диаметром сферы.** Очевидно, диаметр сферы равен $2R$. Отметим, что сфера может быть получена вращением полуокружности вокруг её диаметра (рис. 116).

Тело, ограниченное сферой, называется **шаром**. Центр, радиус и диаметр сферы называются также **центром**, **радиусом** и **диаметром шара.** Очевидно, шар радиуса R с центром O содержит все точки пространства, которые расположены от точки O на расстоянии, не превышающем R (включая и точку O), и не содержит других точек.



Сфера радиуса R с центром O

Рис. 115



Сфера получена вращением полуокружности ACB вокруг диаметра AB

Рис. 116

44 Взаимное расположение сферы и плоскости

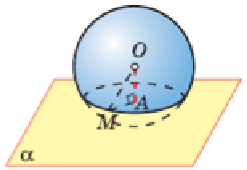
Исследуем взаимное расположение сферы и плоскости в зависимости от соотношения между радиусом сферы и расстоянием от её центра до плоскости.

Радиус сферы обозначим буквой R, а расстояние от её центра (точка O) до плоскости — буквой d. Если точка O не лежит в плоскости α, то проведём перпендикуляр OA к этой плоскости (рис. 117). Его длина равна расстоянию от точки O до плоскости α, т. е. $OA = d$.

Возможны три случая.

1) $d < R$. Рассмотрим произвольную точку M, лежащую как на сфере, так и в плоскости α (рис. 117, *а*). Так как $OM = R$, $OA = d$ и $OA \perp AM$ (поскольку $OA \perp \alpha$), то по теореме Пифагора

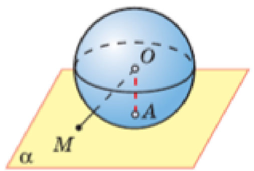
$$AM = \sqrt{OM^2 - OA^2} = \sqrt{R^2 - d^2}.$$



а)

$OM = R,\ OA = d < R,$

$AM = r = \sqrt{R^2 - d^2}$



б)

$OA = d = R,\ OM > R$

Полученное равенство означает, что любая общая точка сферы и плоскости α лежит на расположенной в этой плоскости окружности с центром A и радиусом $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.

Верно и обратное: любая точка этой окружности лежит на сфере. Действительно, если точка M лежит на указанной окружности, то $AM = \sqrt{R^2 - d^2}$, а так как $OA = d$ и $OA \perp AM$, то по теореме Пифагора

$$OM = \sqrt{AM^2 + OA^2} = \sqrt{R^2 - d^2 + d^2} = R,$$

т. е. точка M лежит на данной сфере.

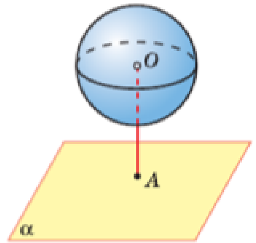
Таким образом, **если расстояние d от центра сферы до плоскости меньше радиуса R сферы, то сечение сферы плоскостью** (т. е. множество всех общих точек сферы и плоскости) **есть окружность радиуса $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.**

Ясно, что сечение шара плоскостью есть круг. Заметим также, что если плоскость проходит через центр шара (случай $d = 0$), то в сечении шара получится круг радиуса R, т. е. радиус круга равен радиусу шара. Такой круг называется **большим кругом шара** (рис. 118).

2) $d = R$. В этом случае $OA = R$, откуда следует, что точка A лежит на сфере (рис. 117, *б*), а для любой точки M плоскости α, отличной от точки A, выполняется неравенство $OM > OA$ (наклонная больше перпендикуляра), т. е. $OM > R$ и, следовательно, точка M не лежит на сфере.

Таким образом, **если расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу сферы, то сфера и плоскость имеют только одну общую точку.**

3) $d > R$. В этом случае точка A, как и любая другая точка плоскости α, расположена вне сферы (рис. 117, *в*). Следовательно, **если расстояние от центра сферы до плоскости больше радиуса сферы, то сфера и плоскость не имеют общих точек.**



в)

$OA = d > R$

Рис. 117

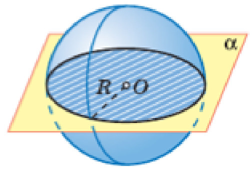
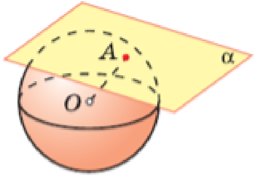


Рис. 118

45 Касательная плоскость к сфере

Рассмотрим более подробно случай, когда сфера и плоскость имеют только одну общую точку. Плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку, называется **касательной плоскостью к сфере**, а их общая точка называется **точкой касания** плоскости и сферы.



Плоскость α — касательная к сфере

Рис. 119

На рисунке 119 плоскость α — касательная к сфере с центром O, A — точка касания. Касательная плоскость к сфере обладает свойством, аналогичным свойству касательной к окружности. Оно выражено в следующей теореме:

Теорема

Радиус сферы, проведённый в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости.

Доказательство

Рассмотрим плоскость α, касающуюся сферы с центром O в точке A (рис. 119). Докажем, что радиус OA перпендикулярен к плоскости α.

Предположим, что это не так. Тогда радиус OA является наклонной к плоскости α, и, следовательно, расстояние от центра сферы до плоскости α меньше радиуса сферы. Поэтому сфера и плоскость пересекаются по окружности. Но это противоречит тому, что плоскость α — касательная, т. е. сфера и плоскость α имеют только одну общую точку. Полученное противоречие доказывает, что радиус OA перпендикулярен к плоскости α. Теорема доказана.

Докажем обратную теорему.

Теорема

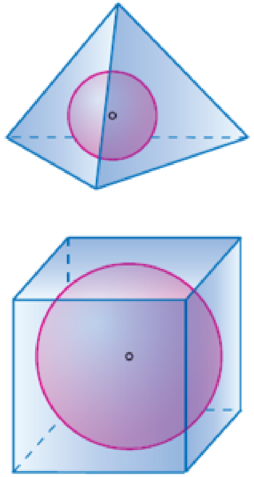
Если радиус сферы перпендикулярен к плоскости, проходящей через его конец, лежащий на сфере, то эта плоскость является касательной к сфере.

Доказательство

Из условия теоремы следует, что данный радиус является перпендикуляром, проведённым из центра сферы к данной плоскости. Поэтому расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу сферы, и, следовательно, сфера и плоскость имеют только одну общую точку. Это и означает, что данная плоскость является касательной к сфере. Теорема доказана.

46 Площадь сферы

В отличие от боковой поверхности цилиндра или конуса сферу нельзя развернуть на плоскость, и, следовательно, для неё непригоден способ определения и вычисления площади поверхности с помощью развёртки. Для определения площади сферы воспользуемся понятием описанного многогранника. Многогранник называется **описанным около сферы** (шара), если сфера касается всех его граней[1]. При этом сфера называется **вписанной в многогранник**. На рисунке 120 изображены описанные около сферы тетраэдр и куб.



Тетраэдр и куб описаны около сферы

Рис. 120

Рассмотрим последовательность описанных около данной сферы многогранников, в которой число граней многогранника неограниченно возрастает и при этом наибольший размер каждой грани[2] многогранника стремится к нулю. За **площадь сферы** примем предел последовательности площадей поверхностей этих многогранников.

В п. 62 мы докажем, что этот предел существует, и получим следующую формулу для вычисления площади сферы радиуса R:

$$S = 4\pi R^2.$$

47* Взаимное расположение сферы и прямой

Исследуем взаимное расположение сферы с центром O и прямой a в зависимости от соотношения между радиусом сферы R и расстоянием d от центра сферы до прямой a.

Проведём через центр сферы и прямую a плоскость α (если центр сферы лежит на прямой a, то в качестве плоскости α возьмём любую плоскость, проходящую через прямую a). Она пересекает сферу по окружности L с центром O радиуса R. Ясно, что все общие точки сферы и прямой a (если они есть) лежат в плоскости α и, следовательно, на окружности L. Возможны три случая:

1) $d > R$. В этом случае окружность L и прямая a не имеют общих точек, поэтому сфера и прямая a также не имеют общих точек (рис. 121, *а*).

2) $d = R$. В этом случае окружность L и прямая a имеют ровно одну общую точку, поэтому сфера и прямая a также имеют ровно одну общую точку (рис. 121, *б*).

3) $d < R$. В этом случае окружность L и прямая a имеют ровно две общие точки, поэтому сфера и прямая a также имеют ровно две общие точки (рис. 121, *в*).

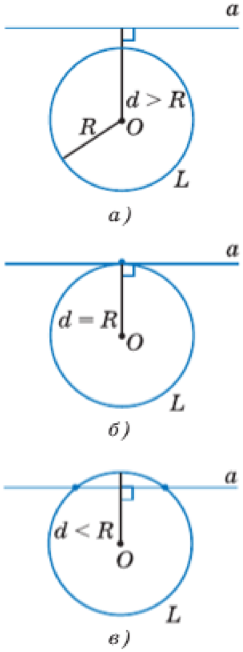


Рис. 121

Прямая, имеющая со сферой ровно одну общую точку, называется **касательной к сфере**, а общая точка — **точкой касания** прямой и сферы.

Докажите самостоятельно, что:

радиус сферы, проведённый в точку касания сферы и прямой, перпендикулярен к этой прямой;

если радиус сферы перпендикулярен к прямой, проходящей через его конец, лежащий на сфере, то эта прямая является касательной к сфере.

Рассмотрим теперь две касательные к сфере с центром O, проходящие через точку A и касающиеся сферы в точках B и C (рис. 122). Отрезки AB и AC назовём отрезками касательных, проведёнными из точки A. Они обладают следующим свойством: **отрезки касательных к сфере, проведённые из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр сферы.**

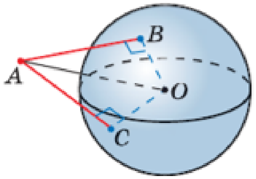


Рис. 122

Это следует из равенства прямоугольных треугольников ABO и ACO (они имеют общую гипотенузу AO и катеты OB и OC, равные радиусу сферы).

60 Объём шара

Теорема

Объём шара радиуса R равен $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Доказательство

Рассмотрим шар радиуса R с центром в точке O и выберем ось Ox произвольным образом (рис. 149). Сечение шара плоскостью, перпендикулярной к оси Ox и проходящей через точку M этой оси, является кругом с центром в точке M. Обозначим радиус этого круга через r, а его площадь через $S(x)$, где x — координата точки M. Выразим $S(x)$ через x и R. Из прямоугольного треугольника OMC находим

$$r = \sqrt{OC^2 - OM^2} = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Так как $S(x) = \pi r^2$, то

$$S(x) = \pi\,(R^2 - x^2). \qquad (1)$$

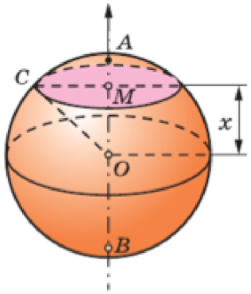


Рис. 149

Заметим, что эта формула верна для любого положения точки M на диаметре AB, т. е. для всех x, удовлетворяющих условию $-R \leqslant x \leqslant R$. Применяя основную формулу для вычисления объёмов тел при $a = -R$, $b = R$, получаем:

$$V = \int_{-R}^{R} \pi\,(R^2 - x^2)\,dx = \pi R^2 \int_{-R}^{R} dx - \pi \int_{-R}^{R} x^2 dx =$$

$$= \pi R^2 x \Big|_{-R}^{R} - \frac{\pi x^3}{3}\Big|_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

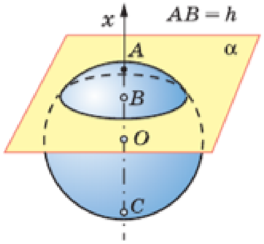
Теорема доказана.

61 Объёмы шарового сегмента, шарового слоя и шарового сектора

а) **Шаровым сегментом** называется часть шара, отсекаемая от него какой-нибудь плоскостью. На рисунке 150 секущая плоскость α, проходящая через точку B, разделяет шар на два шаровых сегмента. Круг, получившийся в сечении, называется **основанием** каждого из этих сегментов, а длины отрезков AB и BC диаметра AC, перпендикулярного к секущей плоскости, называются **высотами** сегментов.

Если радиус шара равен R, а высота сегмента равна h (на рисунке 150 $h = AB$), то объём V шарового сегмента вычисляется по формуле

$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3} h\right).$$



Шаровой сегмент

Рис. 150

▼ Действительно, проведём ось Ox перпендикулярно к плоскости α (см. рис. 150). Тогда площадь $S(x)$ произвольного сечения шарового сегмента плоскостью, перпендикулярной к оси Ox, выражается формулой (1) при $R - h \leqslant x \leqslant R$. Применяя основную формулу для вычисления объёмов тел при $a = R - h$, $b = R$, получаем:

$$V = \pi \int_{R-h}^{R} (R^2 - x^2)\, dx = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{R-h}^{R} =$$

$$= \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3} h\right). \ \triangle$$

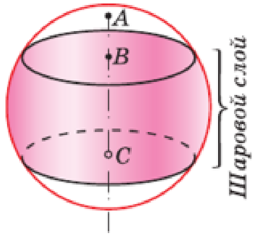


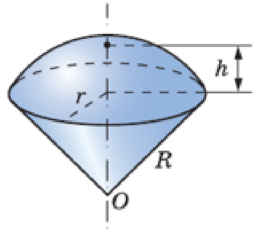
Рис. 151

б) **Шаровым слоем** называется часть шара, заключённая между двумя параллельными секущими плоскостями (рис. 151). Круги, получившиеся в сечении шара этими плоскостями, называются **основаниями** шарового слоя, а расстояние между плоскостями — **высотой** шарового слоя.

Объём шарового слоя можно вычислить как разность объёмов двух шаровых сегментов. Например, объём шарового слоя, изображённого на рисунке 151, равен разности объёмов шаровых сегментов, высоты которых равны AC и AB.

в) **Шаровым сектором** называется тело, полученное вращением кругового сектора с углом, меньшим 90°, вокруг прямой, содержащей один из ограничивающих круговой сектор радиусов (рис. 152). Шаровой сектор состоит из шарового сегмента и конуса. Если радиус шара равен R, а высота шарового сегмента равна h, то объём V шарового сектора вычисляется по формуле

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 h.$$



Шаровой сектор

Рис. 152

Выведите эту формулу самостоятельно.