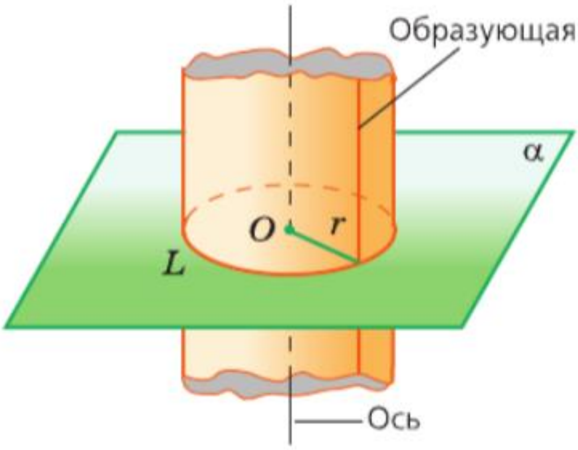
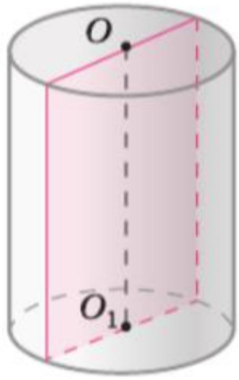
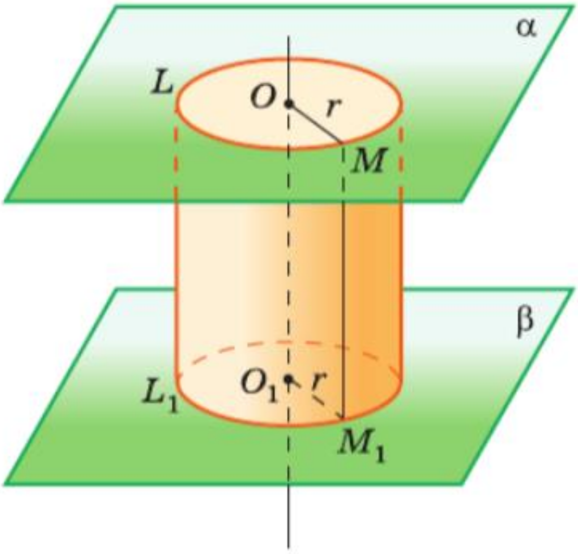
Цилиндр. Площадь поверхности и объём цилиндра



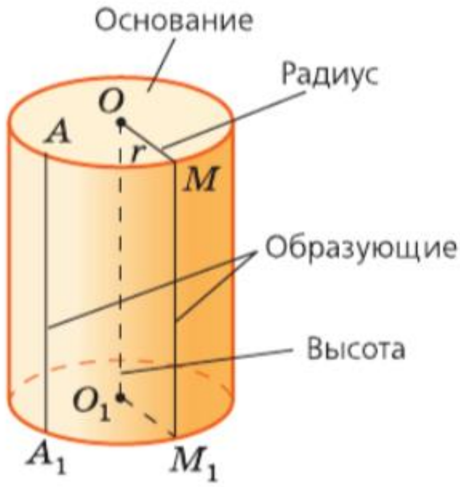
Цилиндрическая поверхность



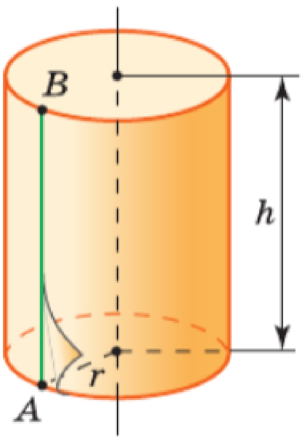
Осевое сечение цилиндра.

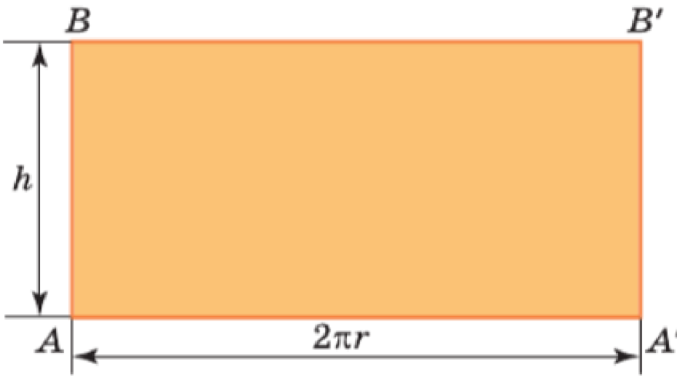


$\alpha \perp OO_1, \beta \perp OO_1$



Цилиндр





Развёртка боковой поверхности цилиндра

► Ось цилиндра – прямая, соединяющая центры его оснований.
Отрезок, соединяющий центры оснований – высота.

► Образующая цилиндра – перпендикуляр, проведенный из точки границы одного основания к другому основанию.
Заметим, что образующая и высота цилиндра равны друг другу.

► Площадь боковой поверхности цилиндра $S_{\text{бок.пов.}} = 2\pi rh$, где r – радиус основания, h – высота (или образующая).

► Площадь полной поверхности цилиндра равна сумме площади боковой поверхности и площадей оснований.

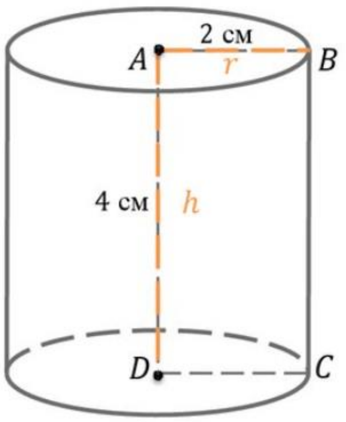
$$S_{\text{полн.пов.}} = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

► Объем цилиндра $V = S_{\text{осн}} \cdot h = \pi r^2 h$

Примеры решения задач

Задача. Цилиндр получен в результате вращения прямоугольника $ABCD$ около прямой AD. Вычислите площадь боковой поверхности цилиндра, если длины сторон AD и AB прямоугольника равны соответственно 4 см и 2 см.

Решение.



$S_{\text{бок.пов.}} = 2\pi r \cdot h$

$AB = r = 2$ см

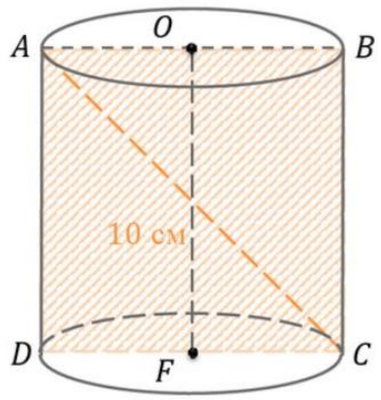
$AD = h = 4$ см

$S_{\text{бок.пов.}} = 2\pi r \cdot h = 2\pi \cdot 2 \cdot 4 = 16\pi$ (см^2)

Ответ: 16π см^2.

Задача. Осевое сечение цилиндра – квадрат, длина диагонали которого равна 10 см. Вычислите площадь боковой поверхности цилиндра.

Решение.



$S_{\text{бок.пов.}} = 2\pi r \cdot h$

$ABCD$ – квадрат

$AB = BC = CD = AD$

$d = h$

$AC = 10 = \sqrt{2} \cdot a$

$a = AB = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$ (см)

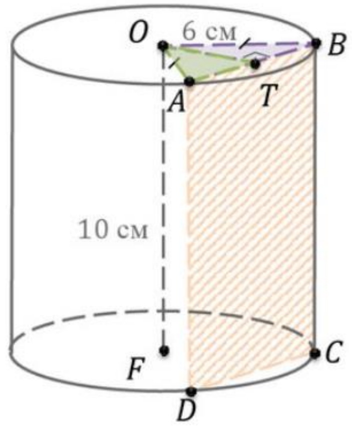
$r = \frac{1}{2} d = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ (см)

$S_{\text{бок.пов.}} = 2\pi \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot 5\sqrt{2} = 50\pi$ (см^2)

Ответ: 50π см^2.

Задача. Высота цилиндра равна 10 см. Площадь сечения цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра и находящейся на расстоянии 6 см от нее, равна 160 см^2. Вычислите площадь полной поверхности цилиндра.

Решение.



$S_{\text{полн.пов.}} = 2\pi r \cdot (h + r)$

$AD = BC = h = 10$ (см)

$AB = DC = \frac{S_{\text{сеч}}}{AD} = \frac{160}{10} = 16$ (см)

$OA = OB = r$

OT – перпендикуляр, $\Rightarrow TO$ – высота и медиана ΔAOB.

ΔAOT – прямоугольный.

$AT = TB = \frac{1}{2}AB = 8$ (см)

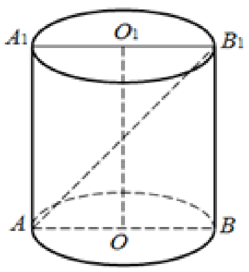
$r = OA = \sqrt{OT^2 + AT^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ (см)

$S_{\text{полн.пов.}} = 2\pi \cdot 10 \cdot (10 + 10) = 400\pi$ (см^2)

Ответ: 400π см^2.

Задача

Осевое сечение цилиндра – квадрат со стороной, длина которой равна 10 см. Вычислите радиус основания, длину диагонали осевого сечения, его площадь, площадь полной поверхности и объём цилиндра.



OO_1 – ось цилиндра, AA_1B_1B – осевое сечение цилиндра: $AA_1 = A_1B_1 = B_1B = AB = 10$ см. AA_1 и BB_1 – образующие цилиндра, A_1B_1 и AB – его диаметры.

1) Радиус цилиндра $r = OA = \frac{1}{2}AB = 5$ см.

2) Длина диагонали. Т.к. AA_1B_1B – квадрат, то $AB_1 = 10\sqrt{2}$ см.

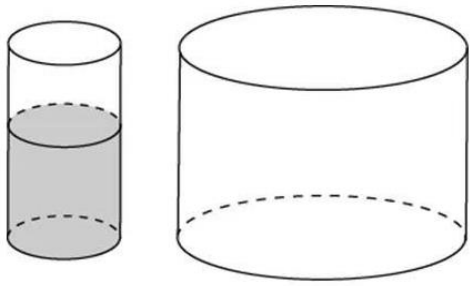
3) Площадь осевого сечения $S_{AA_1B_1B} = 10^2 = 100$ см^2.

4). Площадь полной поверхности. $S_{полн} = 2S_{осн} + S_{бок} = 2\pi r^2 + 2\pi rH$, где $H = AA_1 = OO_1 = BB_1 = 10$ см. $S_{полн} = 2\pi \cdot 5^2 + 2\pi \cdot 5 \cdot 10 = 150\pi$ см^2.

5). Объём цилиндра $V = \pi r^2 H = \pi \cdot 25 \cdot 10 = 250\pi$ см^3.

Задача

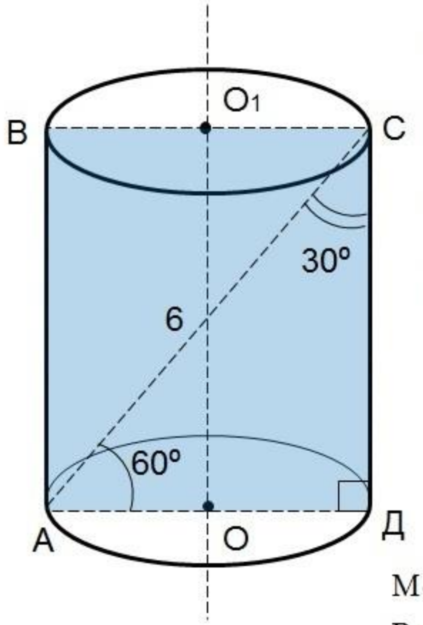
В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 18 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить во второй сосуд, диаметр которого в 3 раза больше первого?



Ответ. 2 см.

Задача

Диагональ осевого сечения цилиндра равна 6 и наклонена к плоскости основания цилиндра под углом 60 градусов найдите радиус основания цилиндра.



$\Delta ACД$ прямоугольный.

$\angle САД=60° \Rightarrow \angle АСД=30°$

Катет, лежащий напротив угла в 30°, равен половине гипотенузы:

$$АД=\frac{АС}{2}=\frac{6}{2}=3$$

Радиус основания $ОД=\frac{АД}{2}=\frac{3}{2}=1,5$

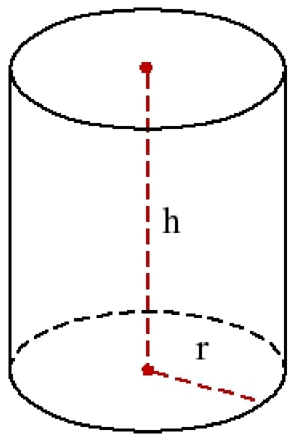
Можно АД найти по другому:

В прямоугольном $\Delta АСД$ надо найти катет, прилежащий к углу в 60°:

$$АД = АС\cos 60° = 6\cdot\frac{1}{2}=3$$

Радиус основания $ОД=\frac{АД}{2}=\frac{3}{2}=1,5$

Задача



Дано:

цилиндр

V — объём, r — радиус

h — высота

а) $r = 2\sqrt{2}$ см, h = 3 см

б) r = h, V = 8 см³

Найти: а) V, б) h

Решение:

а) $V = r^2h$

$V = (2\sqrt{2})^2 \cdot 3\pi = 24\pi$ (см³)

Ответ: V = 24 см³

б) $V = r^2h$

$r = h, \quad V = h^2h = h^3$

$$h^3 = \frac{V}{\pi} = \frac{8\pi}{\pi}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{8\pi}{\pi}} = 2 \text{ (см)}$$

Ответ: h = 2 см

1. Задание

В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 18 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить во второй сосуд, диаметр которого в 3 раза больше первого? Ответ дайте в сантиметрах.

Объем цилиндра находится по формуле $V = \pi R^2 h$.

Заметим, что объем цилиндра прямо пропорционален высоте цилиндра и квадрату радиуса основания (значит, и квадрату диаметра, т.к. $d = 2R$). Следовательно, высота цилиндра обратно пропорциональна квадрату радиуса (или диаметра) основания.

Поэтому, если диаметр увеличится в 3 раза, то высота уровня жидкости уменьшится в $3^2 = 9$ раз.

Найдем эту высоту: $\dfrac{18}{9} = 2.$

или:

Рассмотрим два различных цилиндра.

$V_1 = \pi R_1^2 h_1, V_2 = \pi R_2^2 h_2.$

По условию $R_2 = 3R_1 \Rightarrow V_2 = \pi(3R_1)^2 h_2 = 9\pi R_1^2 h_2.$

Т.к. в задании речь идет об одном и том же объеме воды, то $V_1 = V_2.$

Тогда, $\pi R_1^2 h_1 = 9\pi R_1^2 h_2 \Rightarrow h_2 = \dfrac{h_1}{9} = \dfrac{18}{9} = 2.$

Ответ: 2

2. Задание

Дано два цилиндра. Объём первого цилиндра равен 12. У второго цилиндра высота в три раза больше, а радиус основания в два раза меньше, чем у первого.

Найдите объём второго цилиндра.

Рассмотрим два различных цилиндра.

$V_1 = \pi R_1^2 h_1, V_2 = \pi R_2^2 h_2.$

По условию $h_2 = 3h_1$, а $R_2 = \dfrac{1}{2} R_1 \Rightarrow V_2 = \pi \left(\dfrac{1}{2} R_1\right)^2 3h_1 = \dfrac{3}{4}\pi R_1^2 h_1.$

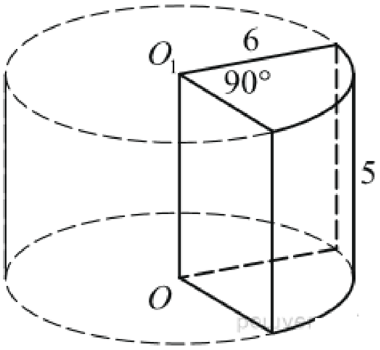
Заметим, что $\pi R_1^2 h_1 = V_1.$

Следовательно, $V_2 = \dfrac{3}{4} V_1 = \dfrac{3}{4} \cdot 12 = 9.$

Ответ: 9

Задание

Найдите объем V части цилиндра, изображенной на рисунке. В ответе укажите V/π.



Решение.

Объем данной части цилиндра равен

$$\frac{90^\circ}{360^\circ}V_{\text{цил}} = \frac{1}{4}V_{\text{цил}} = \frac{1}{4}\pi r^2 h = \frac{1}{4}\pi \cdot 6^2 \cdot 5 = 45\pi.$$

Ответ: 45.

Решение задач из учебника

Задача 326 а). Концы отрезка $AB=13$ дм лежат на окружностях оснований цилиндра. Радиус цилиндра равен 10 дм, а расстояние между прямой AB и осью цилиндра равно 8 дм. Найдите высоту h цилиндра.

Решение.

1) Проведём образующую BC (рис. 4.1). Так как $OO_1 \parallel BC$, то $OO_1 \parallel ABC$.

2) Проведём $OK \perp AC$. Так как $OK \perp OO_1$ и $OO_1 \parallel BC$, то $OK \perp BC$. Таким образом, прямая OK перпендикулярна к двум пересекающимся прямым AC и BC плоскости ABC. Следовательно, $OK \perp ABC$, и поэтому расстояние между прямыми AB и OO_1 равно OK (п. 19), т. е. $OK=8$ дм.

3) Из $\triangle AKO$ получаем

$$AK=\sqrt{10^2-8^2} \text{ дм} = 6 \text{ дм},$$

поэтому $AC=12$ дм.

4) Из $\triangle ABC$ имеем

$$BC=\sqrt{13^2-12^2} \text{ дм} = 5 \text{ дм}.$$

Итак, $h=5$ дм.

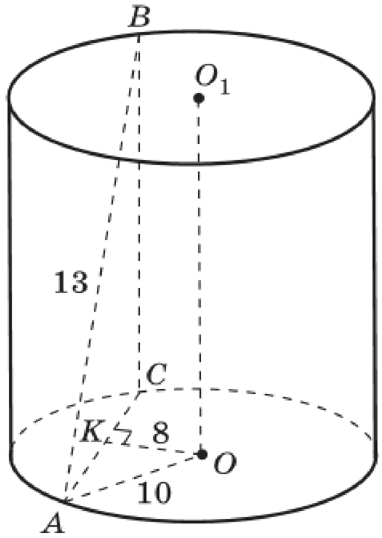


Рис. 4.1

Задача 464 д). В цилиндр вписана правильная n-угольная призма. Найдите отношение объёмов призмы и цилиндра.

Решение.

1) На рисунке 5.2 изображены три боковые грани правильной n-угольной призмы, вписанной в цилиндр. Введём обозначения: $CC_1 = h$, $OB = r$, P — периметр, S — площадь основания призмы.

2) В треугольнике OKB имеем $\angle BOK = \frac{180°}{n}$, $OK = r \cdot \cos\frac{180°}{n}$, $BK = r \cdot \sin\frac{180°}{n}$, поэтому $BC = 2r \cdot \sin\frac{180°}{n}$.

3) $P = n \cdot 2r \cdot \sin\frac{180°}{n}$, $S = \frac{1}{2}P \cdot OK = \frac{1}{2}n \cdot r^2 \cdot \sin\frac{360°}{n}$.

4) $$\frac{V_{\text{призмы}}}{V_{\text{цилиндра}}} = \frac{\frac{1}{2}nr^2h \cdot \sin\frac{360°}{n}}{\pi r^2 h} = \frac{n}{2\pi} \cdot \sin\frac{360°}{n}.$$

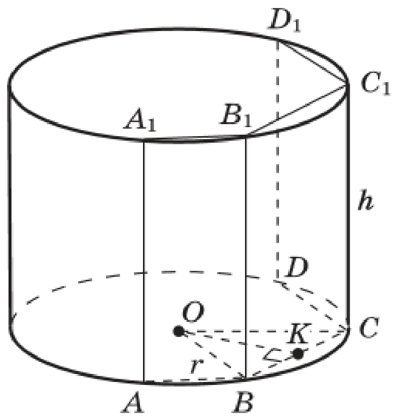


Рис. 5.2