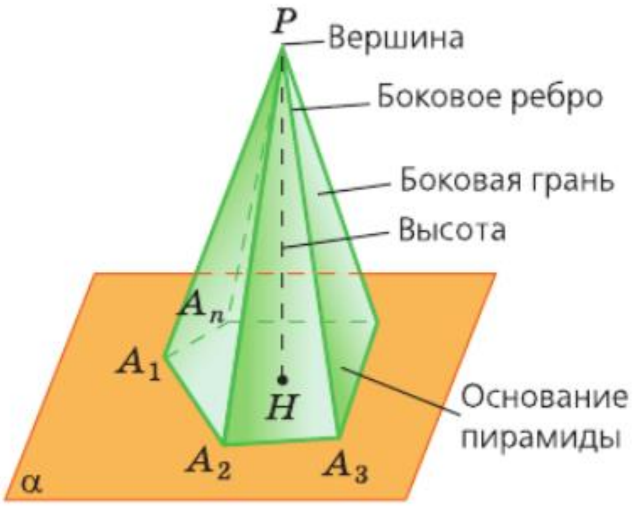
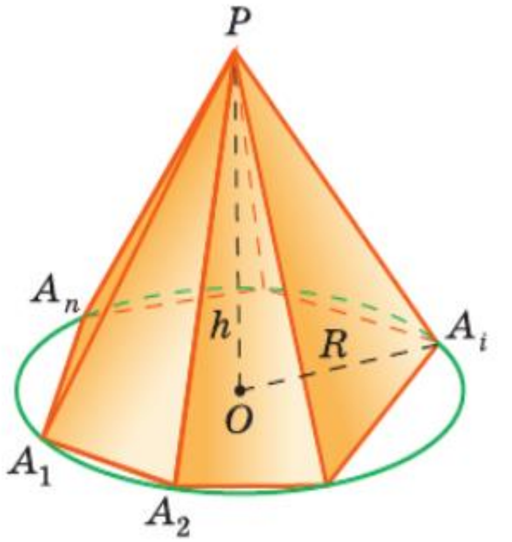
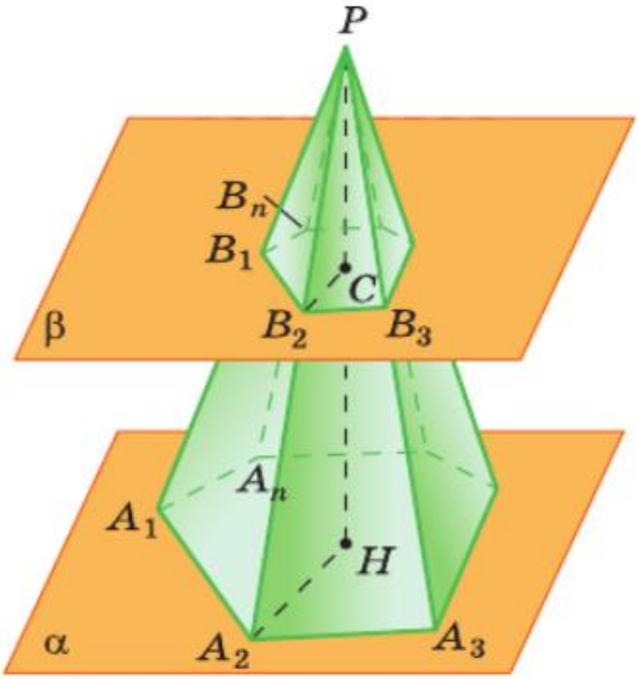
Пирамида. Площадь поверхности и объём пирамиды



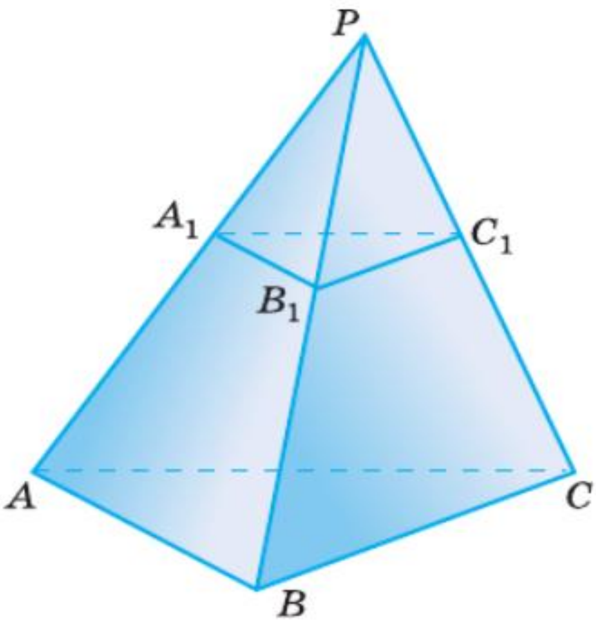
Пирамида $PA_1A_2 \dots A_n$



Правильная пирамида $PA_1A_2 \dots A_n$



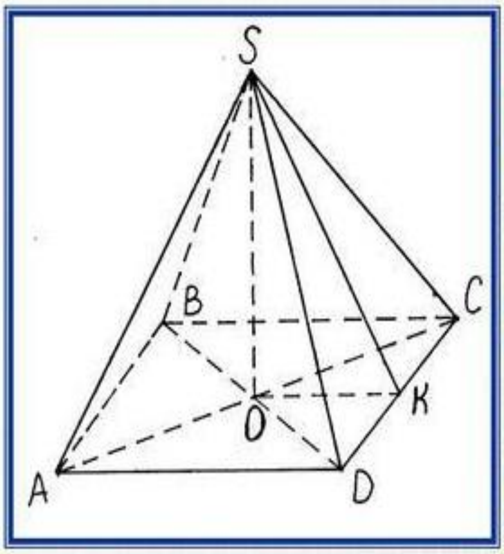
Усечённая пирамида $A_1A_2 \dots A_nB_1B_2 \dots B_n$



$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$,

$k = \dfrac{PA_1}{PA}$

(коэффициент подобия)



Опр. 1.Пирамидой (SABCD) называется многогранник, который состоит из плоского многоугольника - *основания пирамиды* (ABCD), точка S, не лежащая в плоскости основания, - *вершиной пирамиды* и всех отрезков, соединяющих вершину пирамиды с точками основания.

Треугольники SAB, SBC, SCD, SDA - *боковые грани*.

Прямые SA, SB, SC, SD - *боковые ребра* пирамиды.

*Опр. 2.*Перпендикуляр SO, опущенный из вершины на основание, называется *высотой* пирамиды и обозначается *H*.

*Опр. 3.*Пирамида называется *правильной*, если ее основание - правильный многоугольник, а высота ее проходит через центр основания.

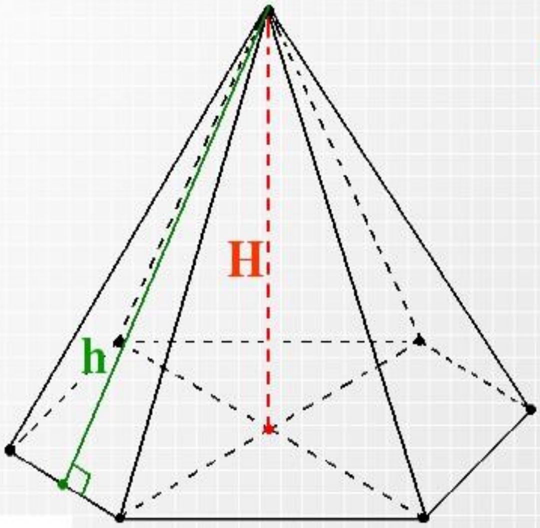
Боковые грани правильной пирамиды - равнобедренные треугольники, равные между собой.

*Опр. 4.*Высота боковой грани правильной пирамиды - *апофема* пирамиды.

*Опр. 5.*Треугольная пирамида называется *тетраэдром*.

Правильная пирамида

- основание – правильный многоугольник, вершина проецируется в центр основания;
- боковые ребра – равны;
- боковые грани – равные равнобедренные треугольники.



H – высота, h – апофема

$$S_{бок} = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot h$$

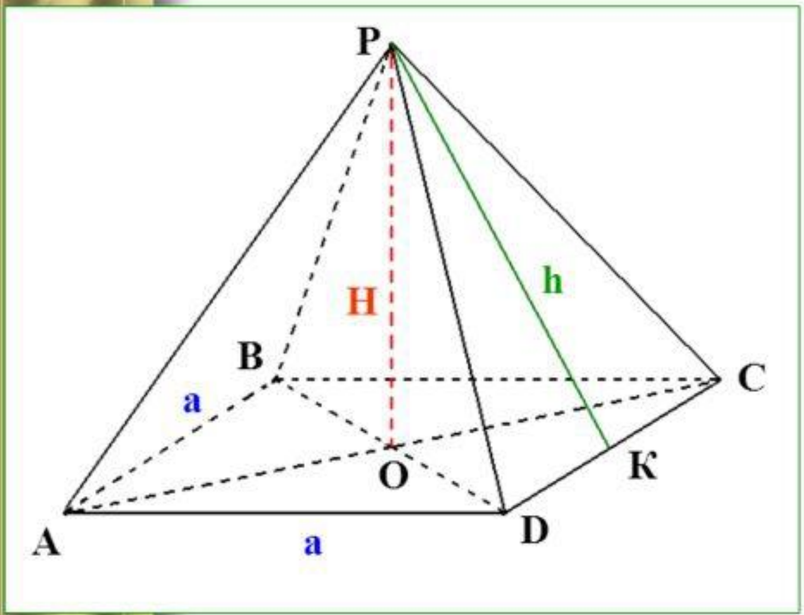
$$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$$

$$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$$

Правильная четырехугольная пирамида

H – высота,   h – апофема,   a – сторона основания

AB = BC = CD = DA = a (в основании – квадрат)



К – середина DC

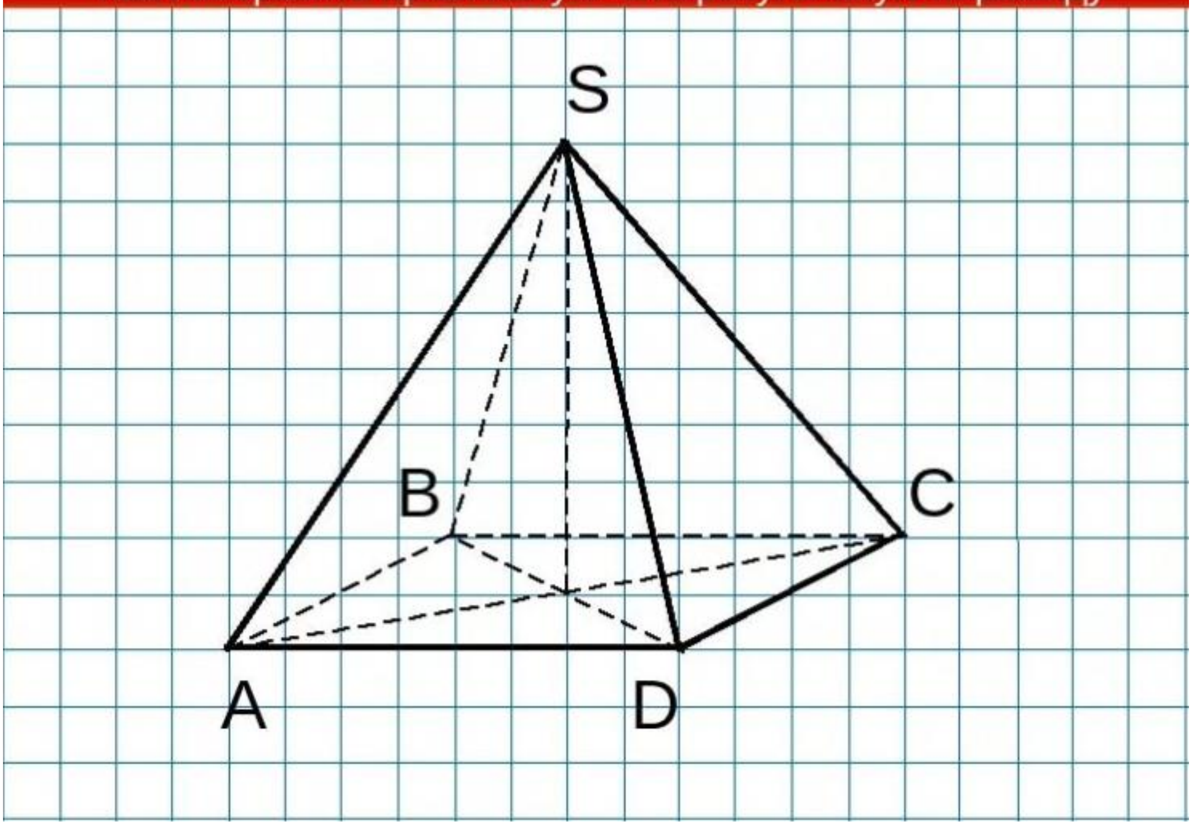
$$OK = \frac{1}{2} \cdot a$$

$$BD = a \cdot \sqrt{2}$$

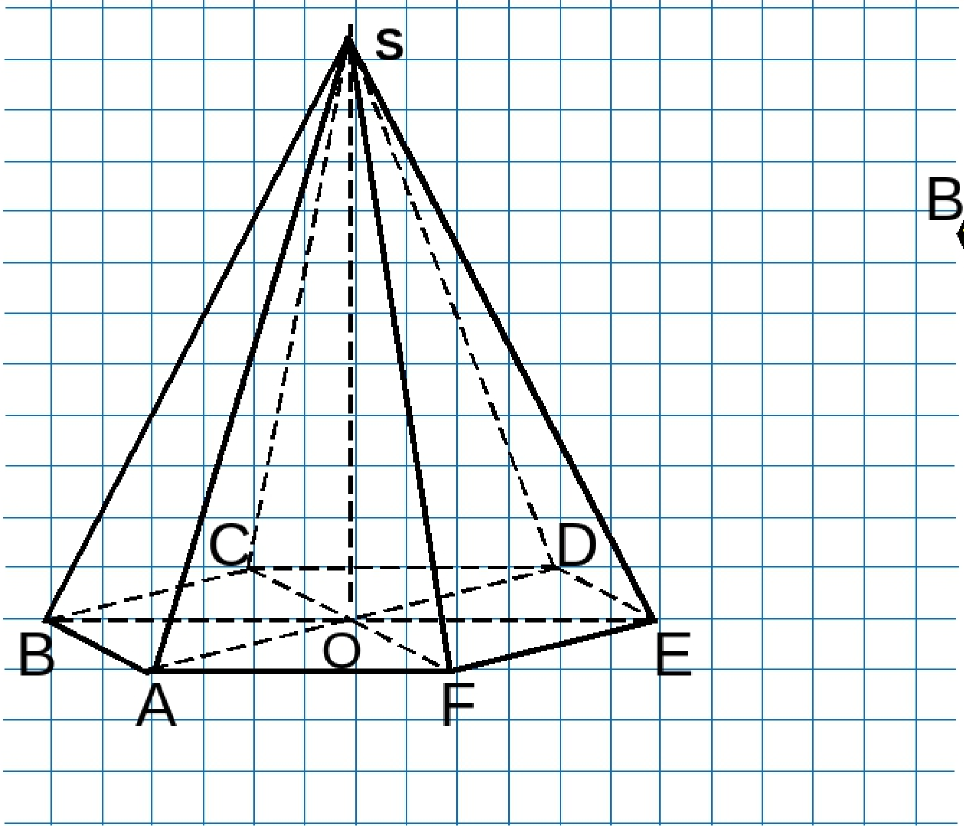
$$S_{бок} = \frac{1}{2} \cdot 4a \cdot h = 2 \cdot a \cdot h$$

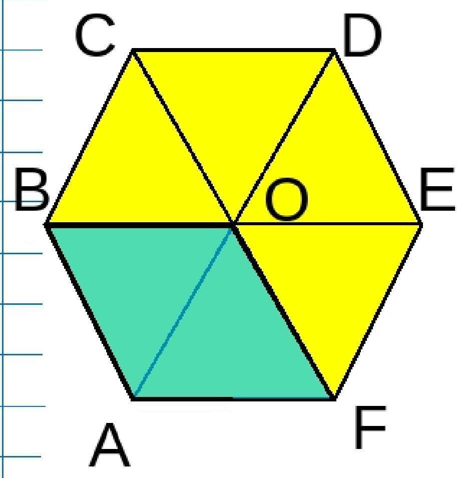
$$S_{п.п.} = a^2 + 2 \cdot a \cdot h$$

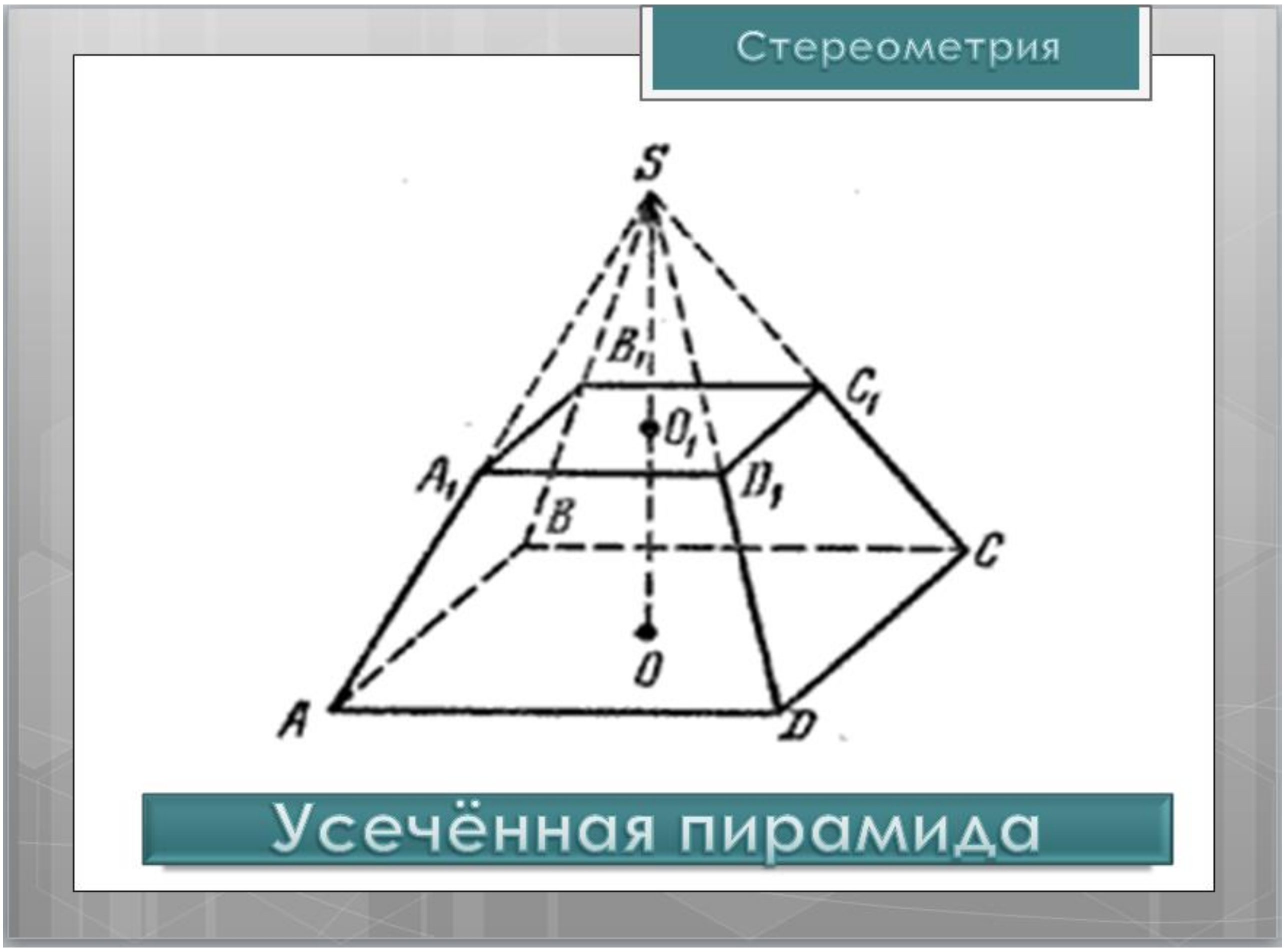
Как изобразить правильную четырехугольную пирамиду



Изображение проекции правильной шестиугольной пирамиды



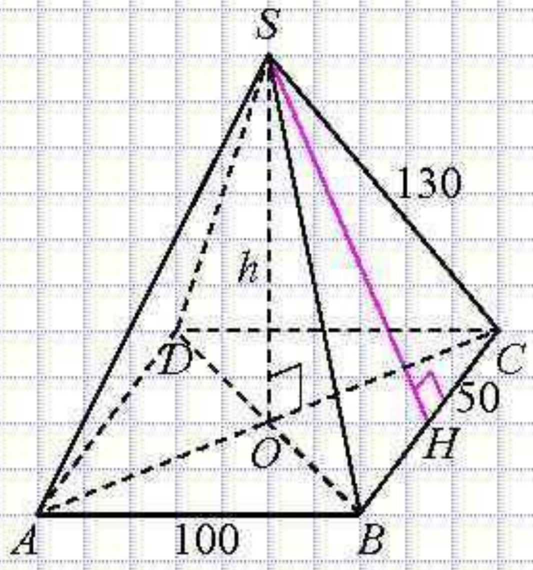




Примеры решения задач

№1

Стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равны 100, боковые ребра равны 130. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.



Решение.

В правильной пирамиде боковые грани – равнобедренные треугольники. SH – высота и медиана одного из них.

В п / у ΔSHC по т. Пифагора

$$SH^2 = SC^2 - HC^2$$

$$SH^2 = 130^2 - 50^2 = 120^2$$

$$SH = 120$$

$$S_{бок.} = \frac{1}{2} P_{осн.} \cdot SH$$

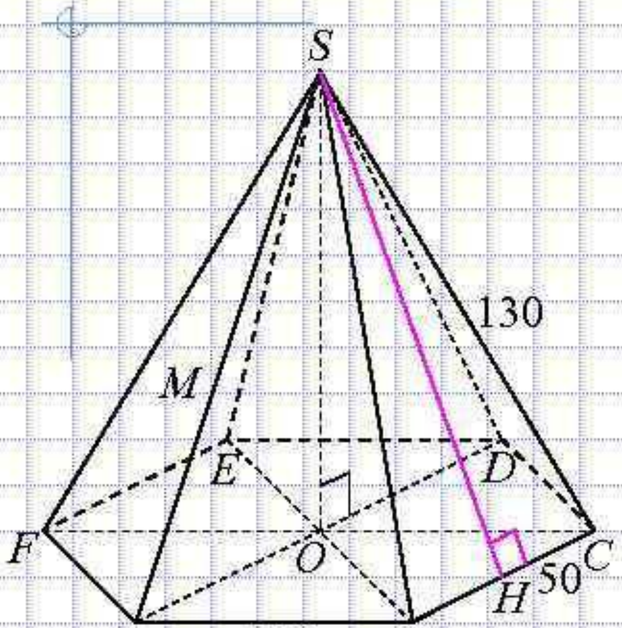
$$P_{осн.} = 4AB = 4 \cdot 100 = 400$$

$$S_{бок.} = \frac{1}{2} \cdot 400 \cdot 120 = 24000.$$

Ответ: 24000.

№2

Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 100, боковые ребра равны 130. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.



Решение.

В правильной пирамиде боковые грани – равнобедренные треугольники. SH – высота и медиана одного из них.

В п / у ΔSHC по т. Пифагора

$$SH^2 = SC^2 - HC^2$$

$$SH^2 = 130^2 - 50^2 = 120^2$$

$$SH = 120$$

$$S_{бок.} = \frac{1}{2} P_{осн.} \cdot SH$$

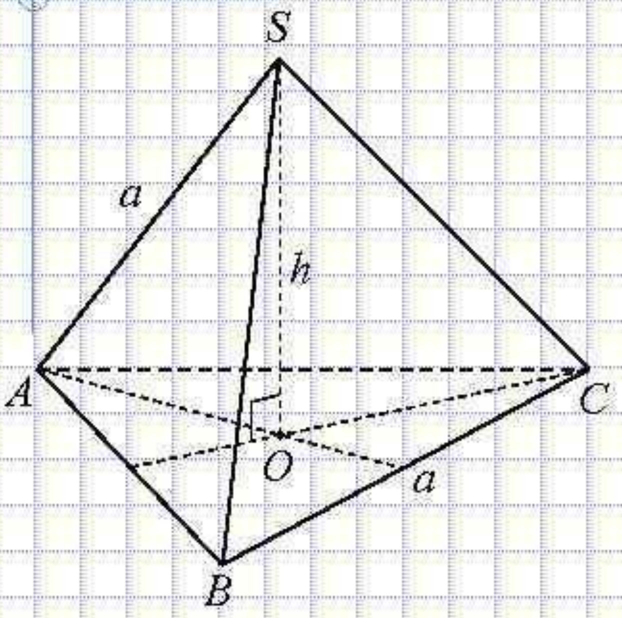
$$P_{осн.} = 6AB = 6 \cdot 100 = 600$$

$$S_{бок.} = \frac{1}{2} \cdot 600 \cdot 120 = 36000.$$

Ответ: 36000.

№3

Во сколько раз увеличится объём правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в десять раз?



Решение.

Объемы подобных тел относятся как куб коэффицента подобия

$$\frac{V_2}{V_1} = k^3 = 10^3 = 1000.$$

Ответ: 1000.

№4

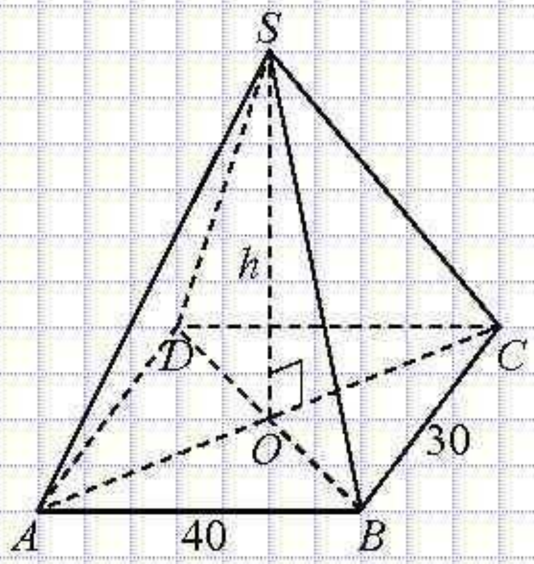
Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 30 и 40. Ее объём равен 1600. Найдите высоту этой пирамиды.

Решение.

$$V_{пир.} = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot h$$

$$S_{осн.} = AB \cdot BC = 40 \cdot 30 = 1200$$

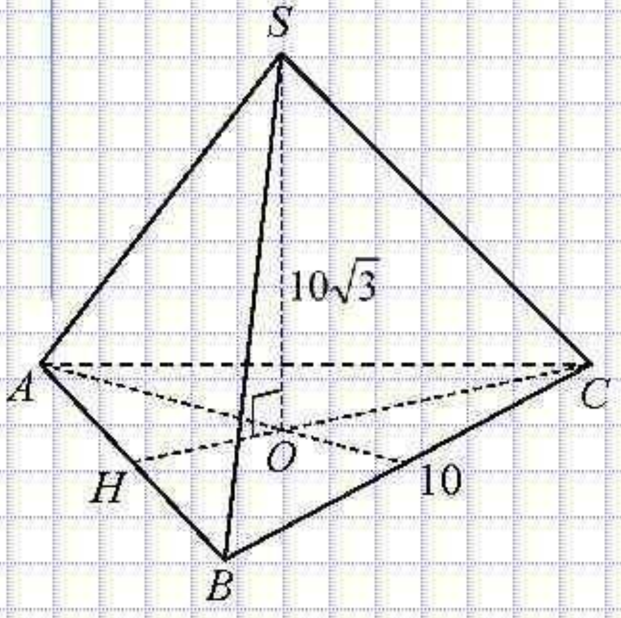
$$h = \frac{3V_{пир.}}{S_{осн.}} = \frac{3 \cdot 16000}{1200} = 40.$$



Ответ: 40.

№5

Найдите объём правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 10, а высота равна 10√3.



Решение.

$$V_{пир.} = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot h$$

Площадь правильного треугольника

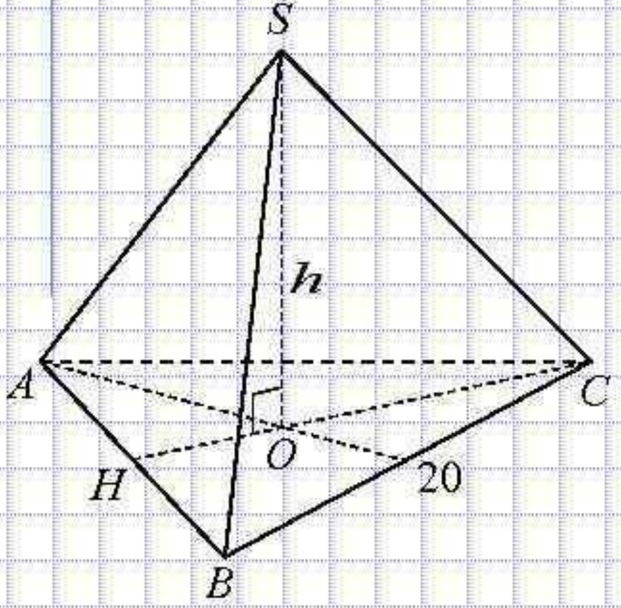
$$S_{осн.} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{10^2\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$$

$$V_{пир.} = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 25\sqrt{3} \cdot 10\sqrt{3} = 250.$$

Ответ: 250.

№6

Найдите высоту правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 20, а объём равен 1000√3.



Решение.

$$V_{пр.} = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot h$$

Площадь правильного треугольника

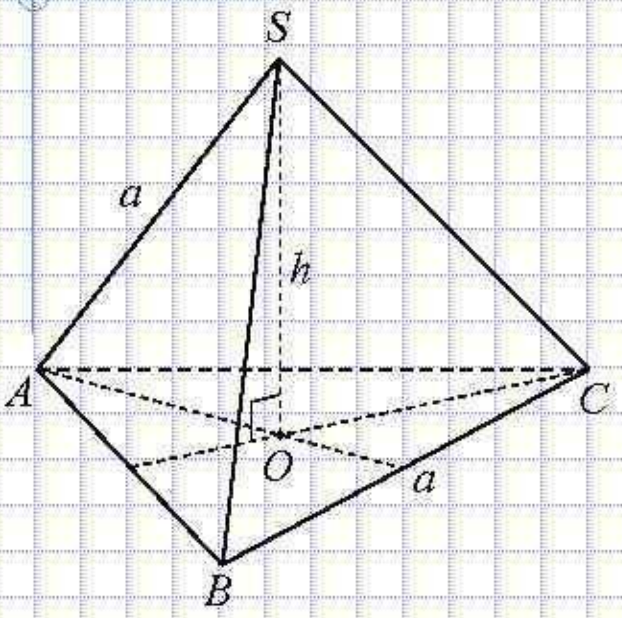
$$S_{осн.} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{20^2\sqrt{3}}{4} = 100\sqrt{3}$$

$$h = \frac{3V_{пр.}}{S_{осн.}} = \frac{3 \cdot 1000\sqrt{3}}{100\sqrt{3}} = 30.$$

Ответ: 30.

№7

Во сколько раз увеличится объём пирамиды, если ее высоту увеличить в пятнадцать раз?



Решение.

При увеличении высоты в 15 раз объем пирамиды увеличится также в 15 раз

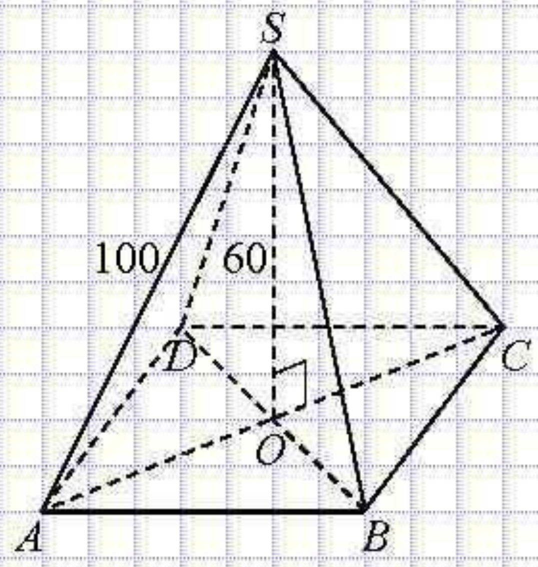
$$V_{пир.1} = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot h$$

$$V_{пир.2} = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot 15h = 15 \cdot V_{пир.1}$$

Ответ: 15.

№8

В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 60, боковое ребро равно 100. Найдите ее объём.



Решение.

В п / у ΔASO по т. Пифагора

$$AO^2 = SA^2 - SO^2$$

$$AO^2 = 100^2 - 60^2 = 80^2$$

$$AO = 80$$

$$AB = 80\sqrt{2}$$

$$S_{осн.} = AB^2 = \left(80\sqrt{2}\right)^2 = 12800$$

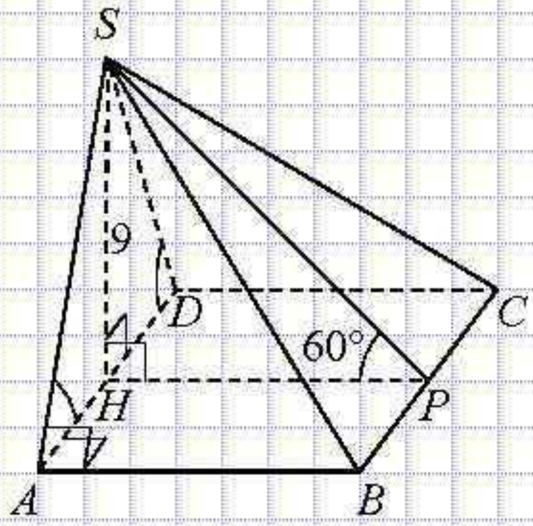
$$V_{пир.} = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot h$$

$$V_{пир.} = \frac{1}{3} \cdot 12800 \cdot 60 = 256000.$$

Ответ: 256000.

№9

Основанием пирамиды служит прямоугольник, одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания, а три другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60°. Высота пирамиды равна 9. Найдите объём пирамиды.



Решение.

$\Delta ASD - p/c, т.к. \angle SAH = \angle SDH = 60^\circ$

(как линейные углы двугранных углов при сторонах основания AB и CD)

$В\ п/у\ \Delta SHP\ \ HP = \frac{SH}{tg60^\circ} = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$

$AD = \frac{2SH}{\sqrt{3}} = \frac{2\cdot 9}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$

$\left(как\ сторона\ p/c\ \ \Delta ASD\right)$

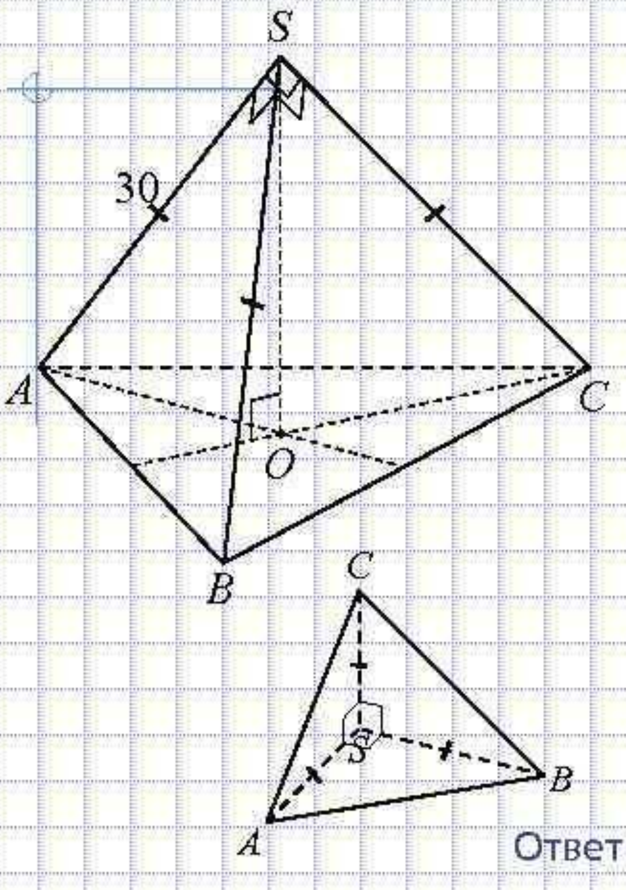
$S_{осн.} = AB\cdot AD = HP\cdot AD = 3\sqrt{3}\cdot 6\sqrt{3} = 54$

$V_{пир.} = \frac{1}{3}S_{осн.}\cdot h = \frac{1}{3}\cdot 54\cdot 9 = 162.$

Ответ: 162.

№10

Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое из них равно 30. Найдите объём пирамиды.



Решение.

Повернем пирамиду на одну из боковых граней так, что боковое ребро станет высотой пирамиды

$V_{пир.} = \frac{1}{3}S_{осн.}\cdot h$

$В\ п/у\ \ \Delta SAB$

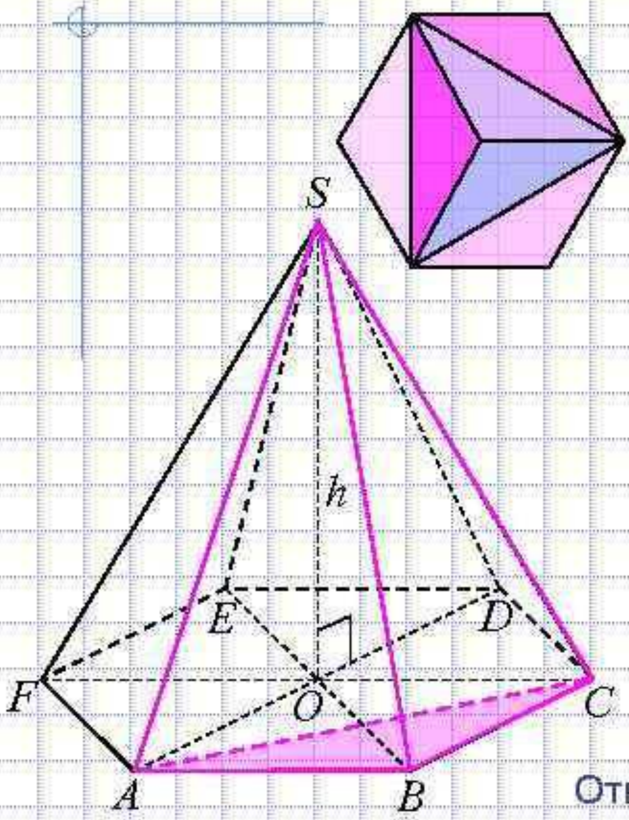
$S_{осн.} = \frac{1}{2}SB\cdot SA = \frac{1}{2}\cdot 30\cdot 30 = 450$

$V_{пир.2} = \frac{1}{3}\cdot 450\cdot 30 = 4500.$

Ответ: 4500.

№11

Объём треугольной пирамиды *SABC*, являющейся частью правильной шестиугольной пирамиды *SABCDEF*, равен 10. Найдите объём шестиугольной пирамиды.



Решение.

Разобьем основание пирамиды на 6 равных частей как на рисунке

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{6} S_{ABCDEF} \Rightarrow S_{ABCDEF} = 6S_{\Delta ABC}$$

SO - общая высота для обеих пирамид

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot h = 10$$

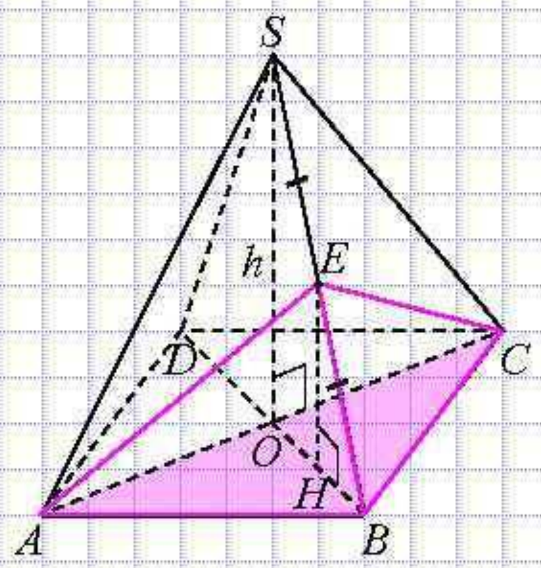
$$V_{ABCDEF} = \frac{1}{3} S_{ABCDEF} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 6S_{\Delta ABC} \cdot h$$

$$V_{ABCDEF} = 6V_{\Delta ABC} = 60.$$

Ответ: 60.

№12

Объём правильной четырехугольной пирамиды *SABCD* равен 120. Точка *E* – середина ребра *SB*. Найдите объём треугольной пирамиды *EABC*.



Решение.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

EH - высота пирамиды EABC,

$EH = \frac{1}{2} SO = \frac{1}{2} h$ *(как средняя линия п / у* ΔSOB*)*

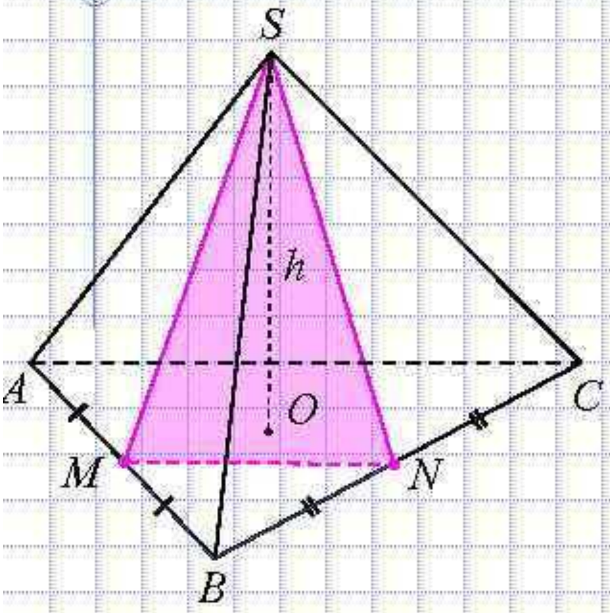
$$V_{SABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot h = 120$$

$$V_{EABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot EH = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{ABCD} \cdot \frac{1}{2} h$$

$$V_{EABC} = \frac{1}{4} V_{SABCD} = \frac{1}{4} \cdot 120 = 30.$$

Ответ: 30.

№13 От треугольной пирамиды, объём которой равен 120, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и среднюю линию основания. Найдите объём отсечённой треугольной пирамиды.



Решение.

$S_{\Delta BMN}=\frac{1}{4}S_{ABC}$ *(из отношения площадей подобных треугольников)*

SO - общая высота обеих пирамид

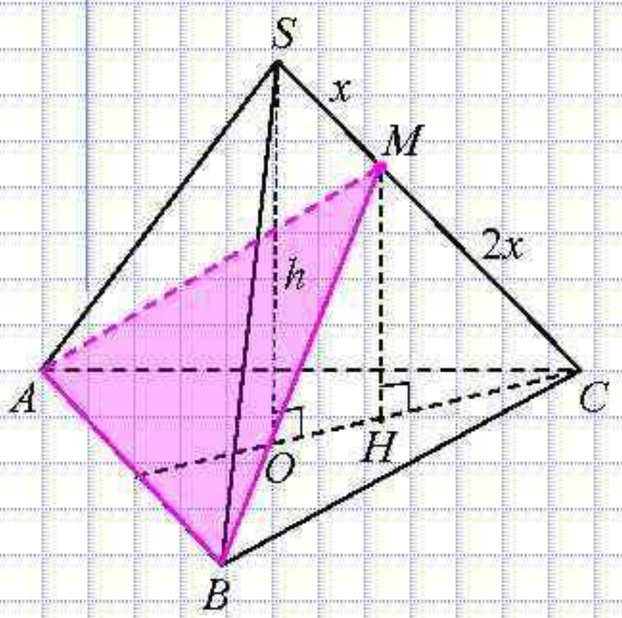
$V_{SABCD}=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot h=120$

$V_{SBMN}=\frac{1}{3}S_{\Delta BMN}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}S_{ABC}\cdot h$

$V_{SBMN}=\frac{1}{4}V_{SABC}=\frac{1}{4}\cdot 120=30.$

Ответ: 30.

№14 Объём треугольной пирамиды равен 150. Плоскость проходит через сторону основания этой пирамиды и пересекает противоположное боковое ребро в точке, делящей его в отношении 1 : 2, считая от вершины пирамиды. Найдите больший из объёмов пирамид, на которые плоскость разбивает исходную пирамиду.



Решение.

Узнаем объем нижней части пирамиды

$V_{MABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot MH$, *где* $MH=\frac{2}{3}h$

(из подобия п / у ΔSOC *и* ΔMHC *)*

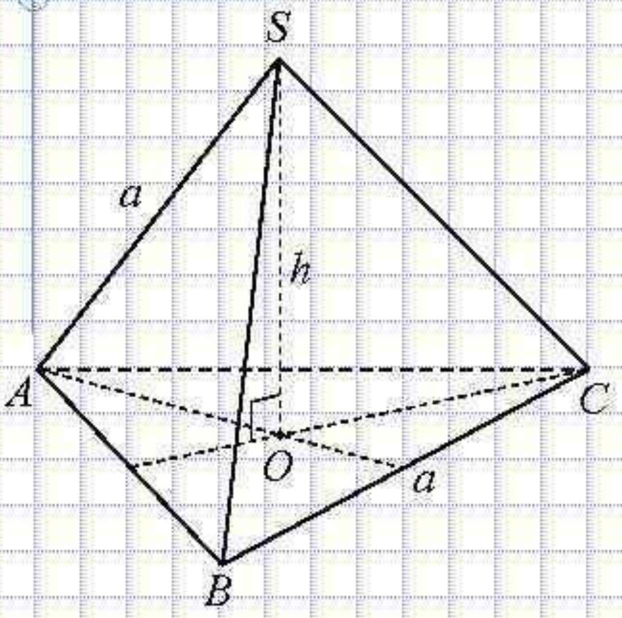
$V_{MABC}=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot\frac{2}{3}h=\frac{2}{3}V_{SABC}$

$V_{MABC}=\frac{2}{3}\cdot 150=100$ *– объем большей части пирамиды, поскольку оставшая часть пирамиды равна* $\frac{1}{3}V_{SABC}$.

Ответ: 100.

№15

Во сколько раз увеличится площадь поверхности правильного тетраэдра, если все его рёбра увеличить в десять раз?



Решение.

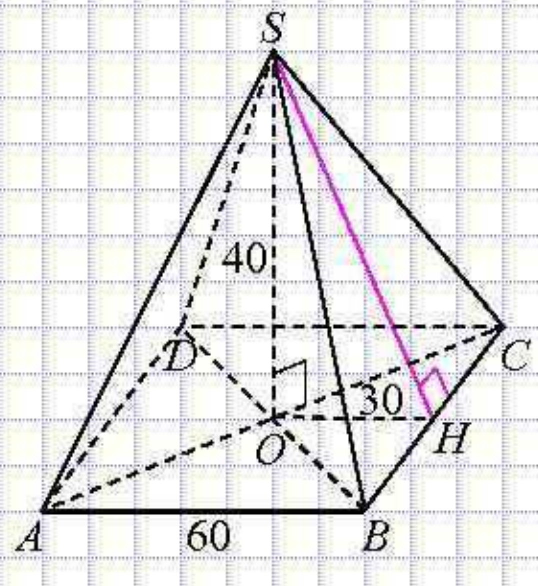
Площади подобных тел относятся как квадрат коэффицента подобия

$$\frac{S_2}{S_1} = k^2 = 10^2 = 100.$$

Ответ: 100.

№16

Найдите площадь поверхности правильной четырехугольной пирамиды, стороны основания которой равны 60 и высота равна 40.



Решение.

В правильной пирамиде боковые грани – равнобедренные треугольники. SH – высота и медиана одного из них. В п / у ΔSOH по т. Пифагора

$$SH^2 = SO^2 + OH^2, \quad OH = \frac{1}{2}AB = 30$$

$$SH^2 = 40^2 + 30^2 = 50^2; \quad SH = 50$$

$$S_{бок.} = \frac{1}{2}P_{осн.} \cdot SH$$

$$P_{осн.} = 4AB = 4 \cdot 60 = 240$$

$$S_{бок.} = \frac{1}{2} \cdot 240 \cdot 50 = 600$$

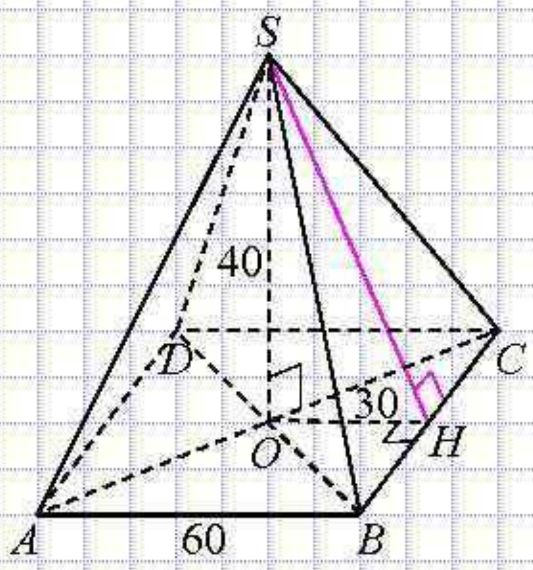
$$S_{осн.} = AB^2 = 60^2 = 3600$$

$$S_{полн.} = S_{бок.} + S_{осн.} = 600 + 3600 = 4200.$$

Ответ: 4200.

№17

Найдите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна 60 и высота равна 40.



Решение.

В правильной пирамиде боковые грани – равнобедренные треугольники, SH – высота и медиана одного из них

В п / у ΔSOH по т. Пифагора

$$SH^2 = SO^2 + OH^2, \quad OH = \frac{1}{2}AB = 30$$

$$SH^2 = 40^2 + 30^2 = 50^2; \quad SH = 50$$

$$S_{бок.} = \frac{1}{2} P_{осн.} \cdot SH$$

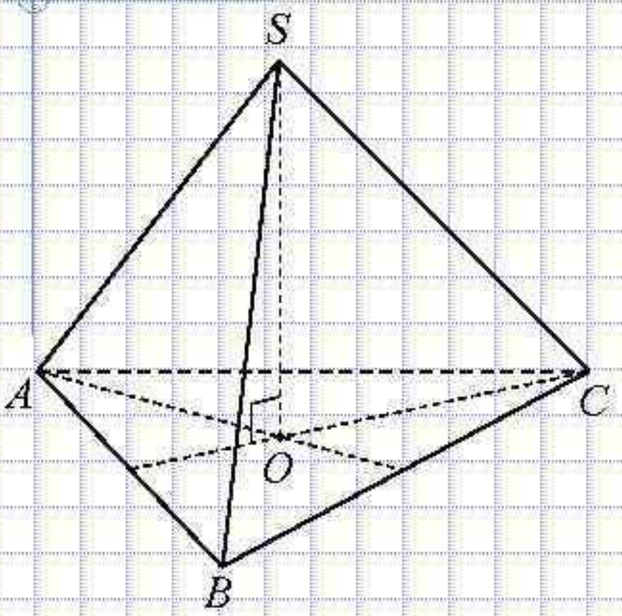
$$P_{осн.} = 4AB = 4 \cdot 60 = 240$$

$$S_{бок.} = \frac{1}{2} \cdot 240 \cdot 50 = 600.$$

Ответ: 600.

№18

Во сколько раз увеличится площадь поверхности пирамиды, если все её ребра увеличить в 10 раз?



Решение.

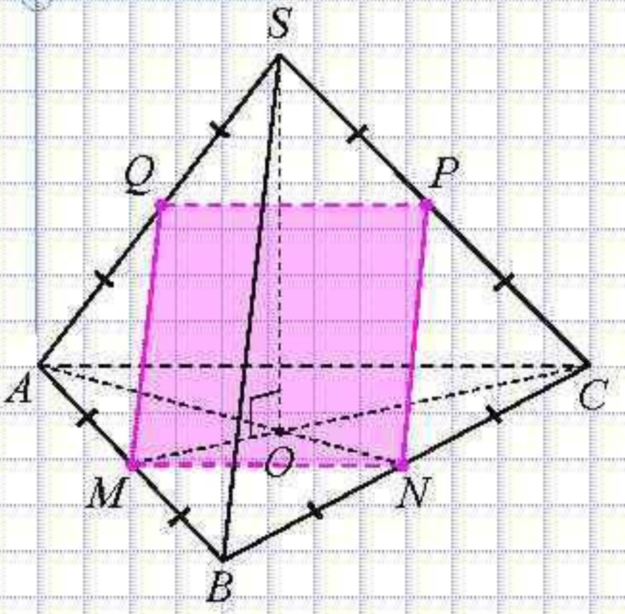
Площади подобных тел относятся как квадрат коэффицента подобия

$$\frac{S_2}{S_1} = k^2 = 10^2 = 100.$$

Ответ: 100.

№19

Ребра тетраэдра равны 10. Найдите площадь сечения, проходящего через середины четырех его ребер.



Решение.

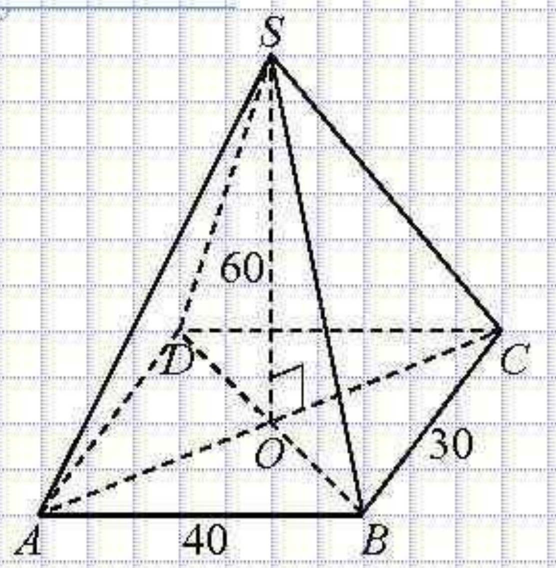
Стороны сечения – средние линии равносторонних треугольников (граней), противолежащие ребра – взаимноперпендикулярны, значит, сечение – квадрат, со стороной, равной половине ребра

$S_{MNPQ} = MN^2 = 5^2 = 25.$

Ответ: 25.

№20

Найдите объём пирамиды, высота которой равна 60, а основание – прямоугольник со сторонами 30 и 40.



Решение.

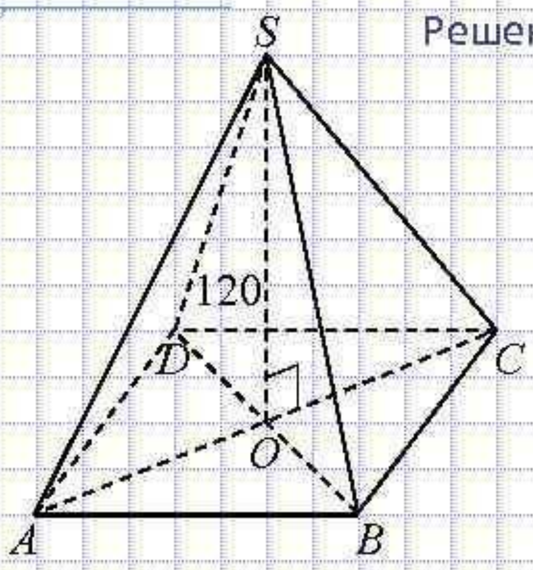
$S_{осн.} = AB \cdot BC = 40 \cdot 30 = 1200$

$V_{пир.} = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 1200 \cdot 60 = 2400.$

Ответ: 2400.

№21

В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 120, объём равен 20000. Найдите боковое ребро этой пирамиды.



Решение. $V_{пир.} = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot h \Rightarrow S_{осн.} = \frac{3V}{h}$

$$S_{осн.} = \frac{3 \cdot 20000}{120} = 500$$

$$S_{осн.} = a^2 = 500 \Rightarrow a = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}$$

$$AO = \frac{1}{2} AC,\ где\ AC = a\sqrt{2},$$

$$AO = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{10\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{10}$$

$В\ п/у\ \Delta ASO$ *по т. Пифагора*

$$AS^2 = AO^2 + OS^2$$

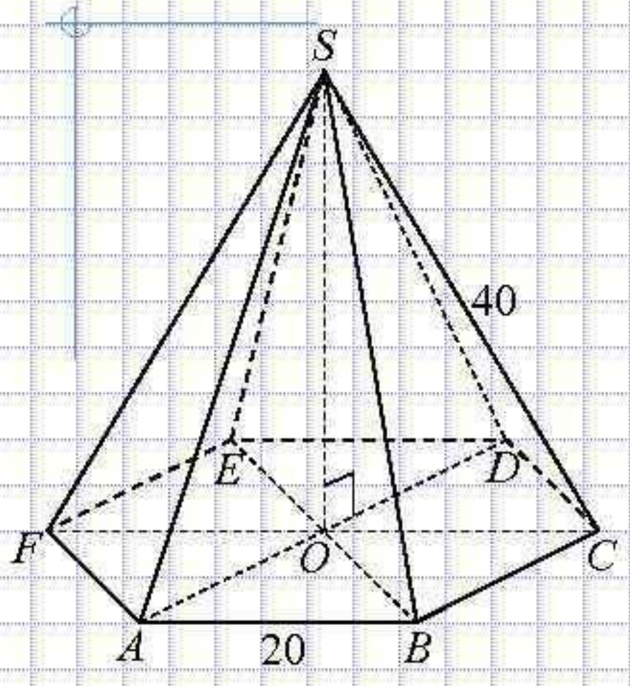
$$AS^2 = \left(5\sqrt{10}\right)^2 + 120^2 = 130^2$$

$$AS = 130.$$

Ответ: 130.

№22

Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 20, боковое ребро равно 40. Найдите объём пирамиды.



Решение.

В правильном шестиугольнике

$$OC = AB = 20,$$

$$S_{осн.} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3 \cdot 20^2\sqrt{3}}{2} = 600\sqrt{3}$$

$В\ п/у\ \Delta SOC$ *по т. Пифагора*

$$SO^2 = SC^2 - OC^2$$

$$SO^2 = 40^2 - 20^2 = 1200$$

$$SO = 20\sqrt{3}$$

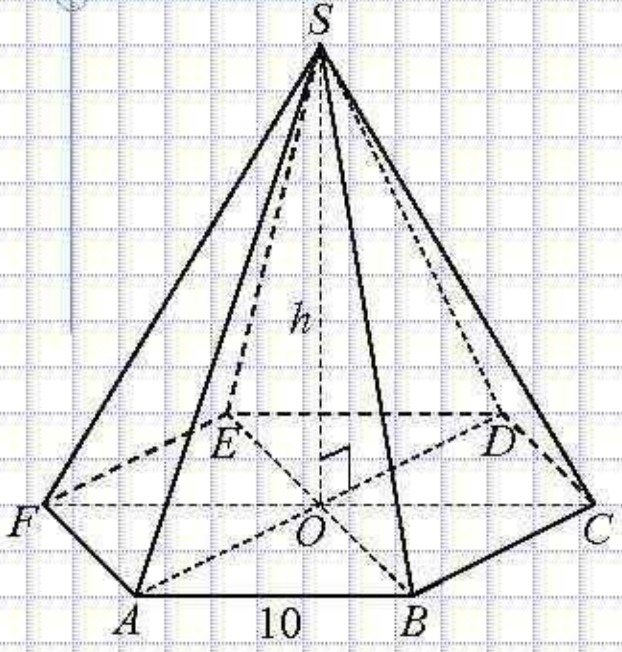
$$V_{пир.} = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot h$$

$$V_{пир.} = \frac{1}{3} \cdot 600\sqrt{3} \cdot 20\sqrt{3} = 12000.$$

Ответ: 12000.

№23

Объём правильной шестиугольной пирамиды 6000. Сторона основания равна 10. Найдите боковое ребро.



Решение.

В правильном шестиугольнике

$OC = AB = 10.$

$$S_{осн.} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3\cdot 10^2\sqrt{3}}{2} = 150\sqrt{3}$$

$$V_{пир.} = \frac{1}{3}S_{осн.}\cdot h \Rightarrow h = \frac{3V_{пир.}}{S_{осн.}}$$

$$h = \frac{3\cdot 6000}{150\sqrt{3}} = 40\sqrt{3} = SO$$

В п / у ΔSOC по т. Пифагора

$$SC^2 = SO^2 + OC^2$$

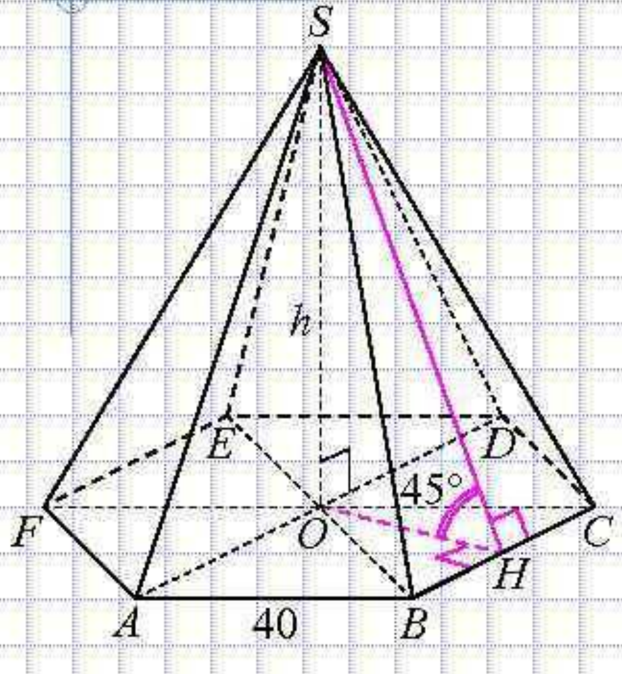
$$SC^2 = \left(40\sqrt{3}\right)^2 + 10^2 = 4900$$

$$SO = 70.$$

Ответ: 70.

№24

Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 40, а угол между боковой гранью и основанием равен 45°. Найдите объём пирамиды.



Решение.

В правильном шестиугольнике

$$OH = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{40\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}$$

$$S_{осн.} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3\cdot 40^2\sqrt{3}}{2} = 2400\sqrt{3}$$

$$\Delta SOH - п / у,\ р / б \Rightarrow$$

$$SO = OH = 20\sqrt{3}$$

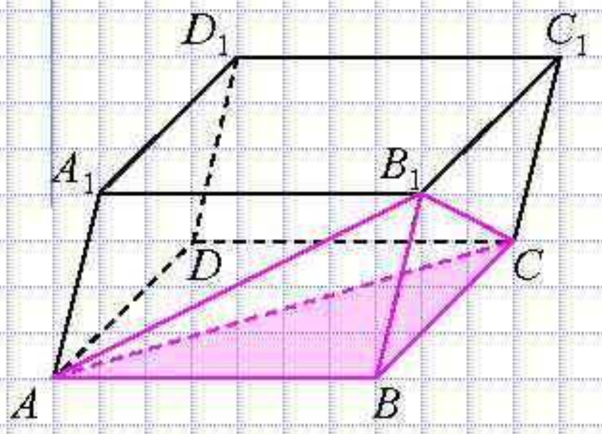
$$V_{пир.} = \frac{1}{3}S_{осн.}\cdot h$$

$$V_{пир.} = \frac{1}{3}\cdot 2400\sqrt{3}\cdot 20\sqrt{3} = 4800.$$

Ответ: 4800.

№25

Объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 120. Найдите объём треугольной пирамиды B_1ABC.



Решение.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$$

Высота пирамиды совпадает с высотой параллелепипеда

$$V_{пар-да} = S_{ABCD} \cdot h = 120$$

$$V_{B_1ABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}S_{ABCD} \cdot h$$

$$V_{B_1ABC} = \frac{1}{6}V_{пар-да} = \frac{1}{6} \cdot 120 = 20.$$

Ответ: 20.

Решение задач из учебника

Задача 241. Основанием пирамиды является параллелограмм со сторонами 5 м и 4 м и меньшей диагональю 3 м. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 2 м. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

Решение.

1) Пусть $AB = 5$ м, $AD = 4$ м, $BD = 3$ м. Заметим, что треугольник ABD прямоугольный: $\angle ADB = 90^\circ$ (рис. 3.8).

$AD \perp DO$, следовательно, по теореме о трёх перпендикулярах $AD \perp MD$, т. е. MD является высотой грани MAD.

2) Из $\triangle MDO$ получаем $MD = \sqrt{2^2 + 1{,}5^2}$ м $= \sqrt{6{,}25}$ м $=$ $= 2{,}5$ м.

3) Из $\triangle ADB$ имеем $DK \perp AB$, $AB \cdot DK = AD \cdot BD$, $5 \cdot DK = 4 \cdot 3$, $DK = \frac{12}{5}$ м. Из $\triangle MOF$ получаем $OF \parallel DK$, $OF = \frac{1}{2}DK$, $OF = \frac{6}{5}$ м.

$$MF = \sqrt{MO^2 + OF^2} = \sqrt{4 + \frac{36}{25}} \text{ м} = \sqrt{\frac{136}{25}} \text{ м} = \frac{2\sqrt{34}}{5} \text{ м}.$$

4) $S_{бок} = 2S_{AMD} + 2S_{AMB} = (4 \cdot 2{,}5 + 5 \cdot \frac{2\sqrt{34}}{5})$ м^2 $= (10 + 2\sqrt{34})$ м^2.

$S_{осн} = 4 \cdot 3$ м^2 $= 12$ м^2. $S_{пир} = (22 + 2\sqrt{34})$ м^2.

Ответ: $(22 + 2\sqrt{34})$ м^2.

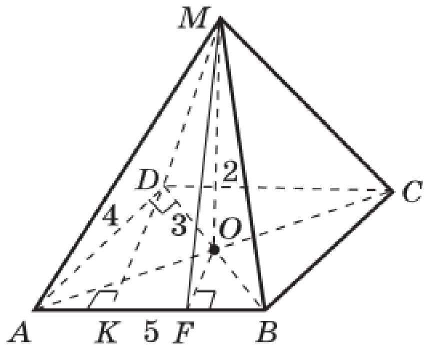


Рис. 3.8

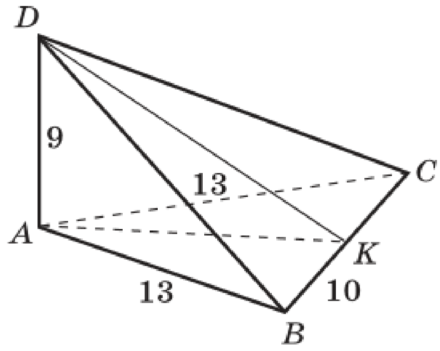


Рис. 3.9

Задача 243. Основанием пирамиды $DABC$ является треугольник ABC, у которого $AB=AC=13$ см, $BC=10$ см, ребро AD перпендикулярно к плоскости основания и равно 9 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Решение.

1) Проведём $AK\perp BC$, тогда $BC\perp DK$ (по теореме о трёх перпендикулярах), т. е. DK — высота треугольника DBC (рис. 3.9).

2) Из $\triangle ABK$ получаем

$$AK=\sqrt{AB^2-BK^2}=\sqrt{169-25}\text{ см}=\sqrt{144}\text{ см}=12\text{ см}.$$

3) Из $\triangle DAK$ имеем

$$DK=\sqrt{DA^2+AK^2}=\sqrt{81+144}\text{ см}=\sqrt{225}\text{ см}=15\text{ см}.$$

4) $\triangle ADB=\triangle ADC$ (по двум катетам). $S_{\text{бок}}=2S_{ADB}+S_{BDC}$, $S_{\text{бок}}=(13\cdot 9+5\cdot 15)\text{ см}^2=(117+75)\text{ см}^2=192\text{ см}^2$.

Ответ: 192 см^2.

Задача 245. Основанием пирамиды является прямоугольник, диагональ которого равна 8 см. Плоскости двух боковых граней перпендикулярны к плоскости основания, а две другие боковые грани образуют с основанием углы в 30° и 45°. Найдите площадь поверхности пирамиды.

Решение.

1) Предположим, что плоскости MAB и MAD перпендикулярны к плоскости основания, тогда линия их пересечения MA перпендикулярна к плоскости основания, т. е. MA — высота пирамиды (рис. 3.10).

2) Так как $CB\perp AB$, то $CB\perp MB$ по теореме о трёх перпендикулярах, поэтому $\angle MBA$ — линейный угол двугранного угла при ребре CB, $\angle MBA=30^\circ$.

Аналогично $AD\perp DC$, $MD\perp DC$, $\angle MDA$ — линейный угол двугранного угла при ребре DC, $\angle MDA=45^\circ$. Треугольники MBC и MDC прямоугольные.

3) Пусть $MA=x$ см, тогда $MB=2x$ см, $AB=x\sqrt{3}$ см. Из $\triangle MAD$ имеем $MA=AD=x$ см, $MD=x\sqrt{2}$ см. Из $\triangle ABC$ получаем $AB^2+BC^2=AC^2$, $3x^2+x^2=64$, $x^2=16$, $x=4$.

4) Таким образом,

$$MA = 4 \text{ см}, \ AB = DC = 4\sqrt{3} \text{ см},$$

$$MB = 8 \text{ см}, \ MD = 4\sqrt{2} \text{ см}, \ AD = BC = 4 \text{ см}.$$

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} AB \cdot AM + \frac{1}{2} AD \cdot AM + \frac{1}{2} BC \cdot BM + \frac{1}{2} DC \cdot DM =$$

$$= \left(\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{2} \right) \text{см}^2 =$$

$$= (24 + 8\sqrt{3} + 8\sqrt{6}) \text{ см}^2.$$

$$S_{\text{осн}} = 4\sqrt{3} \cdot 4 \text{ см}^2 = 16\sqrt{3} \text{ см}^2.$$

$$S_{\text{пир}} = (24 + 24\sqrt{3} + 8\sqrt{6}) \text{ см}^2 = 8(3 + 3\sqrt{3} + \sqrt{6}) \text{ см}^2.$$

Ответ: $8(3 + 3\sqrt{3} + \sqrt{6})$ см^2.

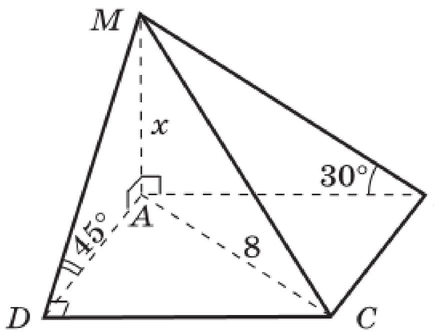


Рис. 3.10

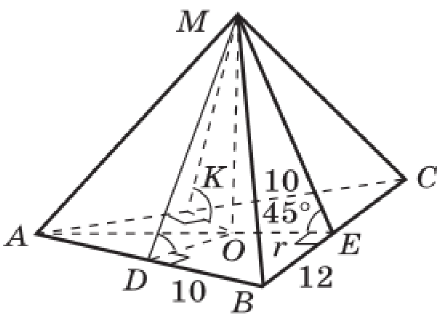


Рис. 3.11

Задача 248. Основанием пирамиды является треугольник со сторонами 12 см, 10 см и 10 см. Каждая боковая грань наклонена к основанию под углом 45°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Решение.

1) Пусть $AB = AC = 10$ см, $BC = 12$ см, MO — высота пирамиды, AE — высота и медиана к стороне BC треугольника ABC (рис. 3.11). Из $\triangle ABE$ получаем $BE = 6$ см, $AE = 8$ см. $S_{ABC} = 6 \cdot 8$ см$^2 = 48$ см^2.

2) Пусть OD и OK — перпендикуляры к сторонам треугольника ABC, тогда $\angle MEO$, $\angle MDO$, $\angle MKO$ — линейные углы двугранных углов, образованных плоскостями боковых граней и основанием пирамиды. $\angle MEO = \angle MDO = \angle MKO = 45°$, $\triangle MEO = \triangle MDO = \triangle MKO$ (по катету MO и противолежащему острому углу в 45°), поэтому $OE = OD = OK$, т. е. точка O — центр окружности, вписанной в основание пирамиды. Пусть $OE = r$. Следовательно, $r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{48}{16}$ см $= 3$ см (p — полупериметр треугольника ABC).

3) Из $\triangle MOE$ получаем $OE = 3$ см, $ME = \frac{OE}{\cos 45°} = 3\sqrt{2}$ см. $MD = MK = ME = 3\sqrt{2}$ см.

4) $S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) \cdot ME = \frac{1}{2}(10 + 12 + 10) \cdot 3\sqrt{2}$ см^2 $= 48\sqrt{2}$ см^2.

Ответ: $48\sqrt{2}$ см^2.

Задача 251. Основанием пирамиды $DABC$ является прямоугольный треугольник с гипотенузой BC. Боковые рёбра пирамиды равны друг другу, а её высота равна 12 см. Найдите боковое ребро пирамиды, если $BC=10$ см.

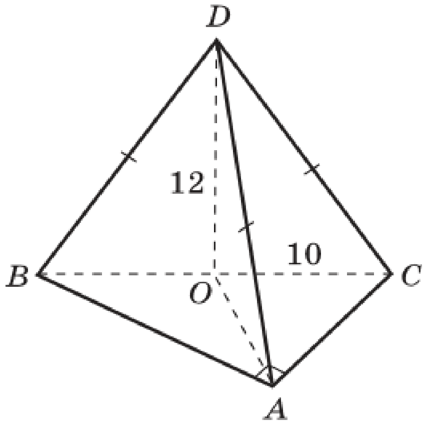


Рис. 3.12

Решение. Пусть DO — высота пирамиды. Тогда треугольники DAO, DBO и DCO равны по гипотенузе и катету. Следовательно, $OA=OB=OC$, т. е. точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC (рис. 3.12). Так как треугольник ABC прямоугольный, то центром описанной окружности является середина гипотенузы BC. Из $\triangle DOC$ получаем $OC=5$ см,

$$DC=\sqrt{DO^2+OC^2}=\sqrt{144+25}\text{ см }=\sqrt{169}\text{ см }=13\text{ см}.$$

Ответ: 13 см.

Задача 264. Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной пирамиды, если сторона её основания равна a, а площадь боковой грани равна площади сечения, проведённого через вершину пирамиды и большую диагональ основания.

Решение.

$AB=a$, $AD=2a$. $S_{\text{гр}}=\frac{1}{2}AB\cdot MK$, $S_{MAD}=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot MO$ (рис. 3.7). По условию задачи $\frac{1}{2}a\cdot MK=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot MO$, откуда $MK=2MO$, и, следовательно, $\angle MKO=30^\circ$. Из $\triangle AOK$ имеем $OK=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Из $\triangle MOK$ получаем

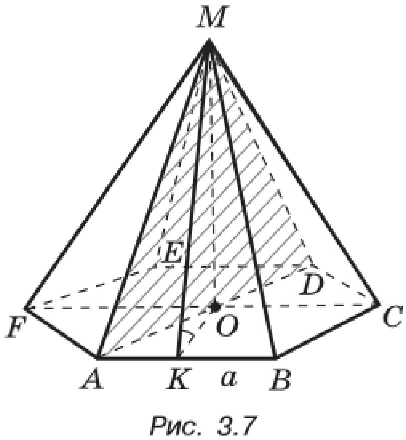


Рис. 3.7

$$MK=\frac{OK}{\cos 30^\circ}=\frac{a\sqrt{3}}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}=a.$$

Таким образом,

$$S_{\text{бок}}=6\cdot\frac{1}{2}a\cdot a=3a^2.$$

Ответ: $3a^2$.

Задача 269. Стороны оснований правильной треугольной усечённой пирамиды равны 4 дм и 2 дм, а боковое ребро равно 2 дм. Найдите высоту и апофему пирамиды.

Решение. Пусть O и O_1 — центры оснований усечённой пирамиды (рис. 3.13).

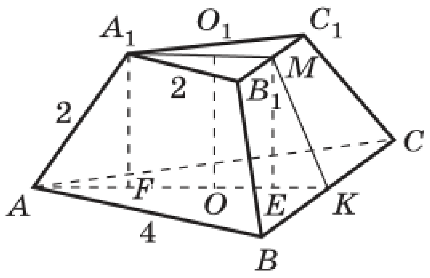


Рис. 3.13

1) Из треугольника ABC получаем $AB=R\sqrt{3}$, где $R=AO$, откуда $AO=\frac{4}{\sqrt{3}}$ дм, $OK=\frac{AO}{2}=\frac{2}{\sqrt{3}}$ дм.

2) Из $\triangle A_1B_1C_1$ находим

$A_1O_1=\frac{2}{\sqrt{3}}$ дм, $O_1M=\frac{1}{\sqrt{3}}$ дм.

3) $EK=OK-OE$, $OE=O_1M$, откуда $EK=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ дм $=\frac{1}{\sqrt{3}}$ дм.

4) Из $\triangle AA_1F$ имеем $AF=AO-FO$, $FO=A_1O_1$. $AF=\left(\frac{4}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ дм $=\frac{2}{\sqrt{3}}$ дм $\cdot$ $A_1F=\sqrt{AA_1^2-AF^2}=\sqrt{4-\frac{4}{3}}$ дм $=\sqrt{\frac{8}{3}}$ дм $=\frac{2\sqrt{6}}{3}$ дм.

5) Из $\triangle MEK$ получаем $MK=\sqrt{ME^2+EK^2}=\sqrt{\frac{8}{3}+\frac{1}{3}}$ дм $=\sqrt{\frac{9}{3}}$ дм $=\sqrt{3}$ дм.

Ответ: $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ дм, $\sqrt{3}$ дм.

Задача 487. Основанием пирамиды является ромб со стороной 6 см. Каждый из двугранных углов при основании равен 45°. Найдите объём пирамиды, если её высота равна 1,5 см.

Решение.

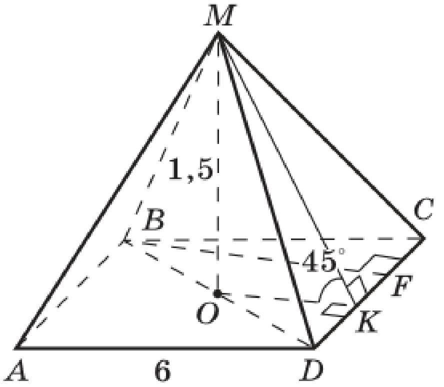


Рис. 5.7

1) По условию двугранные углы при основании пирамиды равны, поэтому вершина пирамиды проецируется в центр круга, вписанного в ромб, т. е. в точку пересечения его диагоналей (рис. 5.7).

2) Угол MKO — линейный угол двугранного угла с ребром DC. Из $\triangle MOK$ находим

$MO=OK=1{,}5$ см.

3) Проведём высоту ромба BF. $BF=2OK=3$ см.

4) $S_{\text{осн}}=6\cdot 3$ см^2 $=18$ см^2.

5) $V=\frac{1}{3}\cdot 18\cdot 1{,}5$ см^3 $=9$ см^3.

Объём усечённой пирамиды рассматриваем как разность объёмов полной пирамиды и той, что отсечена от неё плоскостью, параллельной основанию (рис. 5.6).

Поэтому

$$V_{\text{усеч. пир}} = \frac{1}{3}S(h+x) - \frac{1}{3}S_1x = \frac{1}{3}Sh + \frac{1}{3}(S-S_1)x. \qquad (1)$$

Из равенства

$$\frac{S}{S_1} = \frac{(h+x)^2}{x^2}$$

находим $x = \dfrac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}-\sqrt{S_1}}$.

Подставляя это выражение для x в формулу (1), после преобразований получаем

$$V = \frac{1}{3}h\left(S + S_1 + \sqrt{SS_1}\right).$$

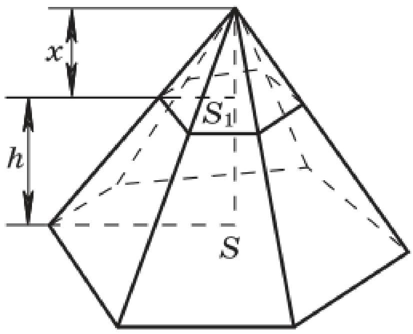


Рис. 5.6