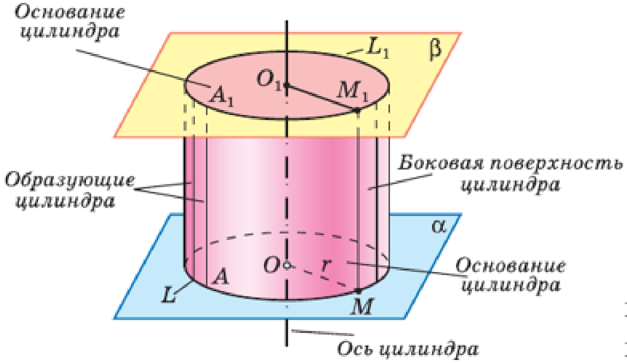
§ 1 Цилиндр

38 Понятие цилиндра

Рассмотрим произвольную плоскость α и окружность L с центром O радиуса r, лежащую в этой плоскости. Через каждую точку окружности L проведём прямую, перпендикулярную к плоскости α. Поверхность, образованная этими прямыми, называется **цилиндрической поверхностью**, а сами прямые — **образующими цилиндрической поверхности**. Прямая, проходящая через точку O перпендикулярно к плоскости α, называется **осью цилиндрической поверхности**. Поскольку все образующие и ось перпендикулярны к плоскости α, то они параллельны друг другу (см. п. 16).

Рассмотрим теперь плоскость β, параллельную плоскости α (рис. 100). Отрезки образующих, заключённые между плоскостями α и β, параллельны и равны друг другу (см. п. 11). По построению концы этих отрезков, расположенные в плоскости α, заполняют окружность L. Концы же, расположенные в плоскости β, заполняют окружность L_1 с центром O_1 радиуса r, где O_1 — точка пересечения плоскости β с осью цилиндрической поверхности. В самом деле, рассмотрим, например, отрезок MM_1 образующей (см. рис. 100). Так как $OO_1 \perp OM$, $MM_1 \perp OM$ и $OO_1 = MM_1$, то четырёхугольник OMM_1O_1 — прямоугольник, поэтому $O_1M_1 = OM = r$, а это означает, что точка M_1 лежит на окружности L_1 с центром O_1 радиуса r.



Цилиндр

Рис. 100

Очевидно, верно и обратное: любая точка M_1 окружности L_1 является концом отрезка MM_1 образующей, проходящей через точку M окружности L и перпендикулярной к плоскости α. Таким образом, цилиндрическая поверхность пересекается с плоскостью β по окружности L_1.

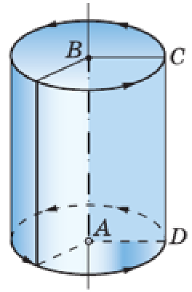
Тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя кругами с границами L и L_1, называется **цилиндром** (см. рис. 100). Круги называются **основаниями цилиндра**, отрезки образующих, заключённые между основаниями, — **образующими цилиндра**, а образованная ими часть цилиндрической поверхности — **боковой поверхностью цилиндра**. Ось цилиндрической поверхности называется **осью цилиндра**.

Как уже отмечалось, все образующие цилиндра параллельны и равны друг другу. Длина образующей называется **высотой цилиндра**, а радиус основания — **радиусом цилиндра**.

Цилиндр может быть получен вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон. На рисунке 101 изображён цилиндр, полученный вращением прямоугольника $ABCD$ вокруг стороны AB. При этом боковая поверхность цилиндра образуется вращением стороны CD, а основания — вращением сторон BC и AD.

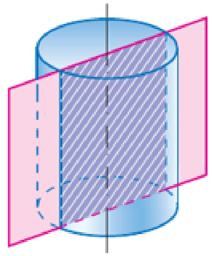
Рассмотрим сечения цилиндра различными плоскостями. Если секущая плоскость проходит через ось цилиндра, то сечение представляет собой прямоугольник (рис. 102), две стороны которого — образующие, а две другие — диаметры оснований цилиндра. Такое сечение называется **осевым**.

Если секущая плоскость перпендикулярна к оси цилиндра, то сечение является кругом. В самом деле, такая секущая плоскость (плоскость γ на рисунке 103) отсекает от данного цилиндра тело, также являющееся цилиндром. Его основаниями служат два круга, один из которых и есть рассматриваемое сечение.



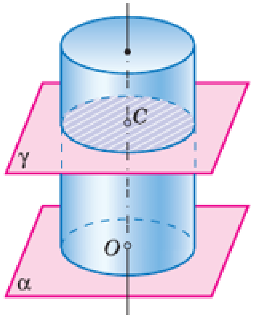
Цилиндр получен вращением прямоугольника $ABCD$ вокруг стороны AB

Рис. 101



Осевое сечение цилиндра — прямоугольник

Рис. 102



Сечение цилиндра плоскостью, перпендикулярной к оси, — круг

Рис. 103

Замечание

На практике нередко встречаются предметы, которые имеют форму более сложных цилиндров. На рисунке 104, *а* изображён цилиндр, каждое основание которого представляет собой фигуру, ограниченную частью параболы и отрезком. На рисунке 104, *б* изображён цилиндр, основаниями которого являются круги, но образующие цилиндра не перпендикулярны к плоскостям оснований (наклонный цилиндр).

Однако в дальнейшем мы будем рассматривать только такие цилиндры, которые были определены в этом пункте. Их называют иногда **прямыми круговыми цилиндрами**.

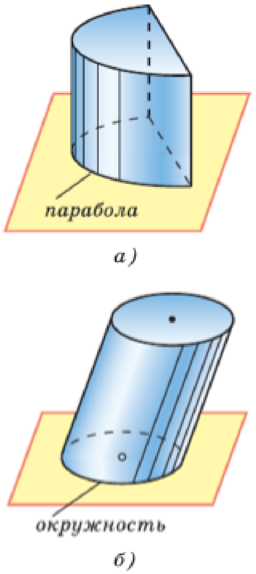
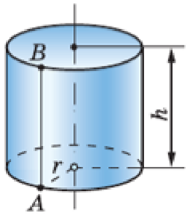


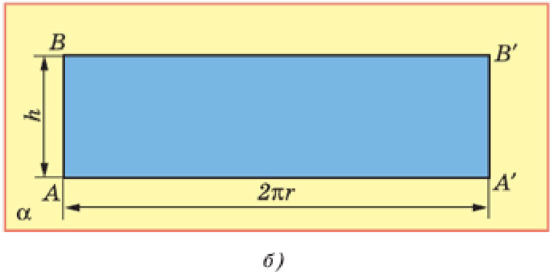
Рис. 104

39 Площадь поверхности цилиндра

На рисунке 105, *а* изображён цилиндр. Представим себе, что его боковую поверхность разрезали по образующей AB и развернули таким образом, что все образующие оказались расположенными в некоторой плоскости α (рис. 105, *б*). В результате в плоскости α получится прямоугольник $ABB'A'$. Стороны AB и $A'B'$ прямоугольника представляют собой два края разреза боковой поверхности цилиндра по образующей AB. Этот прямоугольник называется **развёрткой боковой поверхности цилиндра**. Основание AA' прямоугольника является развёрткой окружности основания цилиндра, а высота AB — образующей цилиндра, поэтому $AA' = 2\pi r$, $AB = h$, где r — радиус цилиндра, h — его высота.

За площадь боковой поверхности цилиндра принимается площадь её развёртки.





Развёртка боковой поверхности цилиндра

Рис. 105

Так как площадь прямоугольника $ABB'A'$ равна $AA' \cdot AB = 2\pi rh$, то для вычисления площади $S_{\text{бок}}$ боковой поверхности цилиндра радиуса r и высоты h получается формула

$$S_{\text{бок}} = 2\pi rh.$$

Итак, **площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению длины окружности основания на высоту цилиндра.**

Площадью полной поверхности цилиндра называется сумма площадей боковой поверхности и двух оснований. Так как площадь каждого основания равна πr^2, то для вычисления площади $S_{\text{цил}}$ полной поверхности цилиндра получаем формулу

$$S_{\text{цил}} = 2\pi r(r + h).$$

55 Объём цилиндра

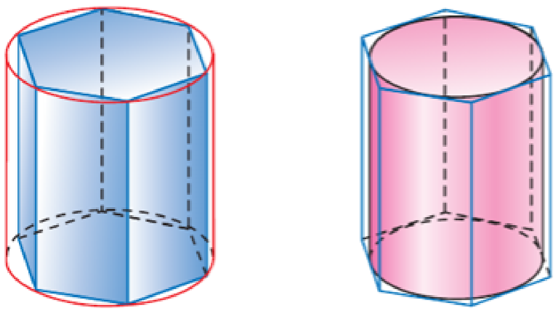
Говорят, что призма **вписана в цилиндр**, если её основания вписаны в основания цилиндра (рис. 137, *а*), и призма **описана около цилиндра**, если её основания описаны около оснований цилиндра (рис. 137, *б*). Ясно, что высота любой призмы, вписанной в цилиндр или описанной около него, равна высоте самого цилиндра.

Теорема

Объём цилиндра равен произведению площади основания на высоту.

▼ **Доказательство**

Впишем в данный цилиндр P радиуса r и высоты h правильную n-угольную призму P_n



а) Призма вписана в цилиндр

б) Призма описана около цилиндра

Рис. 137

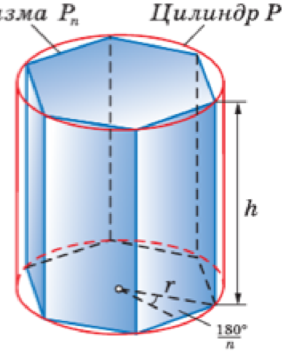


Рис. 138

(рис. 138). Площадь S_n основания этой призмы выражается формулой

$$S_n = nr\sin\frac{180^\circ}{n} r\cos\frac{180^\circ}{n}.$$

Наряду с призмой P_n рассмотрим призму Q_n, описанную около цилиндра P (рис. 139). Площадь её основания равна

$$nr\,\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n} r = \frac{S_n}{\cos^2\frac{180^\circ}{n}}.$$

Поскольку призма P_n содержится в цилиндре P, а цилиндр P содержится в призме Q_n, то объём V цилиндра P удовлетворяет неравенствам

$$S_n \cdot h < V < \frac{S_n}{\cos^2\frac{180^\circ}{n}} \cdot h. \qquad (2)$$

Будем неограниченно увеличивать число n. Так как при $n \to \infty$ $\cos\frac{180^\circ}{n} \to 1$, а $S_n \to \pi r^2$, то правая и левая части неравенств (2) стремятся к величине $\pi r^2 h$. Следовательно,

$$V = \pi r^2 h. \qquad (3)$$

Обозначив площадь πr^2 основания цилиндра буквой S, из формулы (3) получим $V = S \cdot h$. Теорема доказана. △

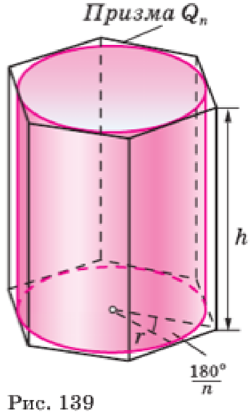


Рис. 139