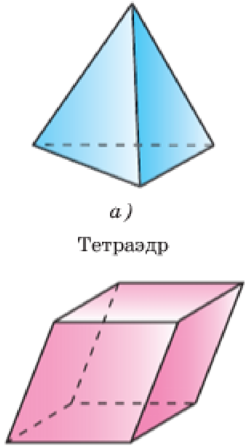
Многогранники

§ 1 Понятие многогранника. Призма

27 Понятие многогранника

В главе I мы рассмотрели тетраэдр и параллелепипед: тетраэдр — поверхность, составленная из четырёх треугольников (рис. 70, *а*), параллелепипед — поверхность, составленная из шести параллелограммов (рис. 70, *б*). Каждая из этих поверхностей ограничивает некоторое геометрическое тело, отделяет это тело от остальной части пространства.

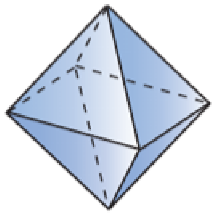


а) Тетраэдр

б) Параллелепипед

Рис. 70

Поверхность, составленную из многоугольников и ограничивающую некоторое геометрическое тело, будем называть многогранной поверхностью или **многогранником**. Тетраэдр и параллелепипед — примеры многогранников. На рисунке 71 изображён ещё один многогранник — **октаэдр**. Он составлен из восьми треугольников. Тело, ограниченное многогранником, часто также называют многогранником.

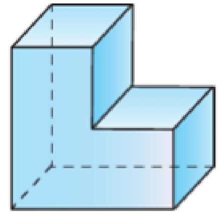


Октаэдр

Рис. 71

Многоугольники, из которых составлен многогранник, называются его **гранями**[1]. Гранями тетраэдра и октаэдра являются треугольники (рис. 70, *а* и 71), гранями параллелепипеда — параллелограммы (рис. 70, *б*). Стороны граней называются **рёбрами**, а концы рёбер — **вершинами** многогранника. Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, называется **диагональю** многогранника. Плоскость, по обе стороны от которой имеются точки многогранника, называется **секущей плоскостью**, а общая часть многогранника и секущей плоскости — **сечением** многогранника.

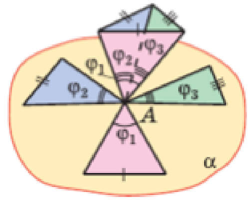
Многогранники бывают выпуклые и невыпуклые. Многогранник называется **выпуклым**, если он расположен по одну сторону от плоскости каждой его грани. Тетраэдр, параллелепипед и октаэдр — выпуклые многогранники. На рисунке 72 изображён **невыпуклый** многогранник.



Невыпуклый многогранник

Рис. 72

Ясно, что все грани выпуклого многогранника являются выпуклыми многоугольниками. Отметим также, что в **выпуклом многограннике сумма всех плоских углов при каждой его вершине меньше 360°** (см. п. 26). Рисунок 73 поясняет это утверждение: многогранник «разрезан» вдоль рёбер и все его грани с общей вершиной A развёрнуты так, что оказались расположенными в одной плоскости α. Видно, что сумма всех плоских углов при вершине A, т. е. $\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3$, меньше $360°$.



$\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3<360°$

Рис. 73

28* Геометрическое тело

Мы отметили, что многогранник ограничивает некоторое геометрическое тело. Уточним понятие геометрического тела.

Точка M называется **граничной** точкой данной фигуры F, если среди сколь угодно близких к ней точек (включая её саму) есть точки, как принадлежащие фигуре, так и не принадлежащие ей. Множество всех граничных точек фигуры называется её **границей**. Так, например, границей шара является сфера.

Точка фигуры, не являющаяся граничной, называется **внутренней** точкой фигуры. Каждая внутренняя точка фигуры характеризуется тем, что все достаточно близкие к ней точки пространства также принадлежат фигуре. Так, любая точка шара, не лежащая на сфере — его границе, является внутренней точкой шара.

Фигура называется **ограниченной**, если её можно заключить в какую-нибудь сферу. Очевидно, шар, тетраэдр, параллелепипед — ограниченные фигуры, а прямая и плоскость — неограниченные.

Фигура называется **связной**, если любые две её точки можно соединить непрерывной линией, целиком принадлежащей данной фигуре. Примерами связных фигур являются тетраэдр (см. рис. 70, *а*), параллелепипед (см. рис. 70, *б*), октаэдр (см. рис. 71), плоскость. Фигура, состоящая из двух параллельных плоскостей, не является связной.

Геометрическим телом (или просто телом) называют ограниченную связную фигуру в пространстве, которая содержит все свои граничные точки, причём сколь угодно близко от любой граничной точки находятся внутренние точки фигуры. Границу тела называют также его **поверхностью** и говорят, что поверхность **ограничивает** тело.

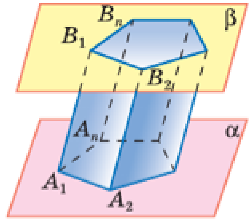
Плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данного тела, называется **секущей плоскостью**. Фигура, которая образуется при пересечении тела плоскостью (т. е. общая часть тела и секущей плоскости), называется **сечением** тела.

30 Призма

Рассмотрим два равных многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$ и $B_1B_2 \ldots B_n$, расположенных в параллельных плоскостях α и β так, что отрезки A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n, соединяющие соответственные вершины многоугольников, параллельны (рис. 76). Каждый из n четырёхугольников

$$A_1A_2B_2B_1,\ A_2A_3B_3B_2,\ \ldots,\ A_nA_1B_1B_n \qquad (1)$$

является параллелограммом, так как имеет попарно параллельные противоположные стороны. Например, в четырёхугольнике $A_1A_2B_2B_1$ стороны A_1B_1 и A_2B_2 параллельны по условию, а стороны A_1A_2 и B_1B_2 — по свойству параллельных плоскостей, пересечённых третьей плоскостью (п. 11).



Призма. Многоугольники $A_1A_2 \ldots A_n$ и $B_1B_2 \ldots B_n$ — основания призмы. Параллелограммы $A_1A_2B_2B_1$, ..., $A_nA_1B_1B_n$ — боковые грани

Рис. 76

Многогранник, составленный из двух равных многоугольников $A_1A_2 \ldots A_n$ и $B_1B_2 \ldots B_n$, расположенных в параллельных плоскостях, и n параллелограммов (1), называется **призмой** (см. рис. 76).

Многоугольники $A_1A_2 \ldots A_n$ и $B_1B_2 \ldots B_n$ называются **основаниями**, а параллелограммы (1) — **боковыми гранями** призмы.

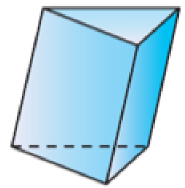
Отрезки A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n называются **боковыми рёбрами** призмы. Эти рёбра как противоположные стороны параллелограммов (1), последовательно приложенных друг к другу, равны и параллельны.

Призму с основаниями $A_1A_2 \ldots A_n$ и $B_1B_2 \ldots B_n$ обозначают $A_1A_2 \ldots A_nB_1B_2 \ldots B_n$ и называют ***n*-угольной призмой.** На рисунке 77 изображены треугольная и шестиугольная призмы, а на рисунке 70, *б* — четырёхугольная призма, являющаяся параллелепипедом.

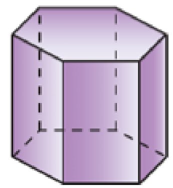
Перпендикуляр, проведённый из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания, называется **высотой** призмы.

Если боковые рёбра призмы перпендикулярны к основаниям, то призма называется **прямой**, в противном случае — **наклонной.** Высота прямой призмы равна её боковому ребру.

Прямая призма называется **правильной**, если её основания — правильные многоугольники. У такой призмы все боковые грани — равные прямоугольники (объясните почему). На рисунке 77 изображена правильная шестиугольная призма.



Наклонная треугольная призма



Правильная шестиугольная призма

Рис. 77

Площадью полной поверхности призмы называется сумма площадей всех её граней, а **площадью боковой поверхности призмы** — сумма площадей её боковых граней. Площадь $S_{\text{полн}}$ полной поверхности выражается через площадь $S_{\text{бок}}$ боковой поверхности и площадь $S_{\text{осн}}$ основания призмы формулой

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}.$$

Докажем теорему о площади боковой поверхности прямой призмы.

Теорема

Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы.

Доказательство

Боковые грани прямой призмы — прямоугольники, основания которых — стороны основания призмы, а высоты равны высоте h призмы. Площадь боковой поверхности призмы равна сумме площадей указанных прямоугольников, т. е. равна сумме произведений сторон основания на высоту h. Вынося множитель h за скобки, получим в скобках сумму сторон основания призмы, т. е. его периметр P. Итак,

$$S_{\text{бок}} = Ph.$$

Теорема доказана.

53 Объём прямоугольного параллелепипеда

Теорема

Объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению трёх его измерений.

▼ **Доказательство**

Обозначим измерения прямоугольного параллелепипеда P буквами a, b, c, а его объём буквой V и докажем, что $V = abc$.

Могут представиться два случая.

1) Измерения a, b и c представляют собой конечные десятичные дроби, у которых число знаков после запятой не превосходит n (можно считать, что $n \geqslant 1$). В этом случае числа $a \cdot 10^n$, $b \cdot 10^n$ и $c \cdot 10^n$ являются целыми. Разобьём каждое ребро параллелепипеда на равные части длины $\frac{1}{10^n}$ и через точки разбиения проведём плоскости, перпендикулярные к этому ребру. Параллелепипед P разобьётся на $abc \cdot 10^{3n}$ равных кубов с ребром $\frac{1}{10^n}$.

Так как объём каждого такого куба равен $\frac{1}{10^{3n}}$ (см. п. 52), то объём всего параллелепипеда P равен $abc \cdot 10^{3n} \cdot \frac{1}{10^{3n}} = abc$.

Итак, $V = abc$.

2) Хотя бы одно из измерений a, b и c представляет собой бесконечную десятичную дробь. Рассмотрим конечные десятичные дроби a_n, b_n, c_n, которые получаются из чисел a, b, c, если отбросить в каждом из них все цифры после запятой, начиная с $(n+1)$-й. Очевидно, $a_n \leqslant a \leqslant a'_n$, где $a'_n = a_n + \frac{1}{10^n}$, и аналогичные неравенства справедливы для b и c. Перемножив эти неравенства, получим

$$a_nb_nc_n \leqslant abc \leqslant a'_nb'_nc'_n, \qquad (1)$$

где $b'_n = b_n + \frac{1}{10^n}$, $c'_n = c_n + \frac{1}{10^n}$.

По доказанному в первом случае левая часть (1) представляет собой объём V_n прямоугольного параллелепипеда P_n с измерениями a_n, b_n, c_n, а правая часть — объём V'_n прямоугольного параллелепипеда P'_n с измерениями a'_n, b'_n, c'_n. Так как параллелепипед P содержит в себе параллелепипед P_n, а сам содержится в параллелепипеде P'_n (рис. 133), то объём V параллелепипеда P заключён между $V_n = a_nb_nc_n$ и $V'_n = a'_nb'_nc'_n$, т. е.

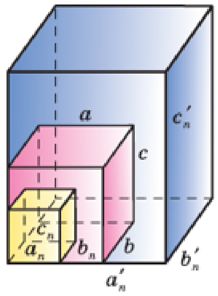


Рис. 133

$$a_nb_nc_n \leqslant V \leqslant a'_nb'_nc'_n. \qquad (2)$$

Будем неограниченно увеличивать n. Тогда число $\frac{1}{10^n}$ будет становиться сколь угодно малым, и поэтому число $a'_nb'_nc'_n$ будет сколь угодно мало отличаться от числа $a_nb_nc_n$. Отсюда в силу неравенств (1) и (2) следует, что число V сколь угодно мало отличается от числа abc. Значит, они равны: $V = abc$, что и требовалось доказать. △

Следствие 1

Объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.

В самом деле, примем грань с рёбрами a и b за основание. Тогда площадь S основания равна ab, а высота h параллелепипеда равна c. Следовательно,

$$V = abc = Sh.$$

Следствие 2

Объём прямой призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник, равен произведению площади основания на высоту.

54 Объём прямой призмы

Теорема

Объём прямой призмы равен произведению площади основания на высоту.

▼ **Доказательство**

Сначала докажем теорему для треугольной прямой призмы, а затем — для произвольной прямой призмы.

1. Рассмотрим прямую треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ с объёмом V и высотой h. Проведём такую высоту треугольника ABC (отрезок BD на рисунке 135), которая разделяет этот треугольник на два треугольника (по крайней мере, одна высота треугольника этому условию удовлетворяет). Плоскость BB_1D разделяет данную призму на две призмы, основаниями которых являются прямоугольные треугольники ABD и BDC. Поэтому объёмы V_1 и V_2 этих призм соответственно равны $S_{ABD} \cdot h$ и $S_{BDC} \cdot h$. По свойству 2^0 объёмов $V = V_1 + V_2$, т. е. $V = S_{ABD} \cdot h + S_{BDC} \cdot h = (S_{ABD} + S_{BDC}) \cdot h$. Таким образом,

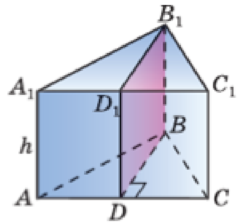


Рис. 135

$$V = S_{ABC} \cdot h. \qquad (1)$$

2. Докажем теорему для произвольной прямой призмы с высотой h и площадью основания S. Такую призму можно разбить на прямые треугольные призмы с высотой h. Например, на рисунке 136 изображена выпуклая пятиугольная призма, которая разбита на три прямые треугольные призмы. Выразим объём каждой треугольной призмы по формуле (1) и сложим эти объёмы. Вынося за скобки общий множитель h, получим в скобках сумму площадей оснований треугольных призм, т. е. площадь S основания исходной призмы. Таким образом, объём исходной призмы равен произведению $S \cdot h$. Теорема доказана. △

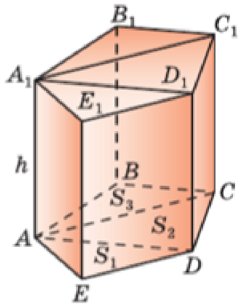


Рис. 136