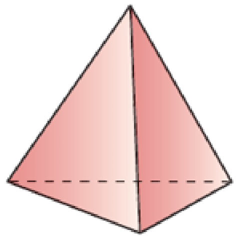
§ 3 Правильные многогранники

36 Понятие правильного многогранника

Выпуклый многогранник называется **правильным**, если все его грани — равные правильные многоугольники и в каждой его вершине сходится одно и то же число рёбер. Примером правильного многогранника является куб. Все его грани — равные квадраты, и к каждой вершине сходятся три ребра.

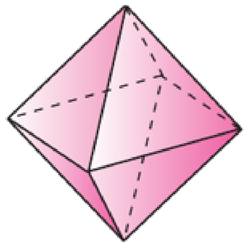
Очевидно, все рёбра правильного многогранника равны друг другу. Можно доказать, что равны также все двугранные углы, содержащие две грани с общим ребром.



Правильный тэтраэдр

Рис. 88

Докажем, что **не существует правильного многогранника, гранями которого являются правильные шестиугольники, семиугольники и вообще n-угольники при $n \geqslant 6$**. В самом деле, угол правильного n-угольника при $n \geqslant 6$ не меньше $120°$ (объясните почему). С другой стороны, при каждой вершине многогранника должно быть не менее трёх плоских углов. Поэтому если бы существовал правильный многогранник, у которого грани — правильные n-угольники при $n \geqslant 6$, то сумма плоских углов при каждой вершине такого многогранника была бы не меньше чем $120° \cdot 3 = 360°$. Но это невозможно, так как сумма всех плоских углов при каждой вершине выпуклого многогранника меньше $360°$ (п. 27).



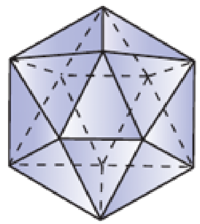
Правильный октаэдр

Рис. 89

По этой же причине каждая вершина правильного многогранника может быть вершиной либо трёх, четырёх или пяти равносторонних треугольников, либо трёх квадратов, либо трёх правильных пятиугольников. Других возможностей нет.

В соответствии с этим получаем следующие правильные многогранники:

Правильный тетраэдр[1] (рис. 88) составлен из четырёх равносторонних треугольников. Каждая его вершина является вершиной трёх треугольников. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна $180°$.



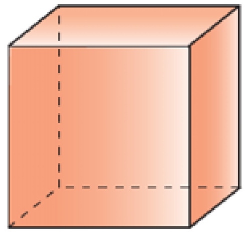
Правильный икосаэдр

Рис. 90

Правильный октаэдр (рис. 89) составлен из восьми равносторонних треугольников. Каждая вершина октаэдра является вершиной четырёх треугольников. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна $240°$.

Правильный икосаэдр (рис. 90) составлен из двадцати равносторонних треугольников. Каждая вершина икосаэдра является вершиной пяти треугольников. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна $300°$.

Куб (рис. 91) составлен из шести квадратов. Каждая вершина куба является вершиной трёх квадратов. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна $270°$.

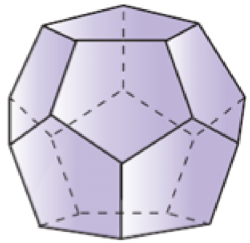


Куб

Рис. 91

Правильный додекаэдр (рис. 92) составлен из двенадцати правильных пятиугольников. Каждая вершина додекаэдра является вершиной трёх правильных пятиугольников. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна $324°$.

Других видов правильных многогранников, кроме перечисленных пяти, нет.



Правильный додекаэдр

Рис. 92

Центры граней куба являются вершинами правильного октаэдра (докажите это), поэтому существование правильного октаэдра не вызывает сомнений.

Правильный икосаэдр составлен из двух правильных пятиугольных пирамид и многогранника, отдалённо напоминающего пятиугольную призму. Высоты пирамид и этого многогранника легко выражаются через ребро a (как?), поэтому существование правильного икосаэдра также не вызывает сомнений.

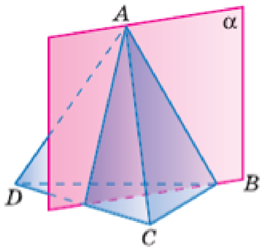
Наконец, центры граней правильного икосаэдра являются вершинами правильного додекаэдра (убедитесь в этом), поэтому правильный додекаэдр тоже существует.

37 Элементы симметрии правильных многогранников

Рассмотрим элементы симметрии правильных многогранников. **Правильный тетраэдр не имеет центра симметрии.** Прямая, проходящая через середины двух противоположных рёбер, является его осью симметрии. Плоскость α, проходящая через ребро AB перпендикулярно к противоположному ребру CD правильного тетраэдра $ABCD$, является плоскостью симметрии (рис. 93). **Правильный тетраэдр имеет три оси симметрии и шесть плоскостей симметрии.**

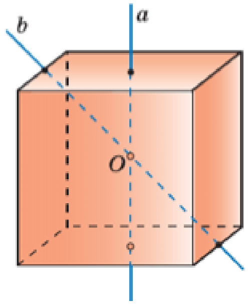
Куб имеет один центр симметрии — точку пересечения его диагоналей. Прямые a и b, проходящие соответственно через центры противоположных граней и середины двух противоположных рёбер, не принадлежащих одной грани, являются его осями симметрии (рис. 94). **Куб имеет девять осей симметрии.** Все оси симметрии проходят через центр симметрии. Плоскостью симметрии куба является плоскость, проходящая через любые две оси симметрии. **Куб имеет девять плоскостей симметрии.**

Правильный октаэдр, правильный икосаэдр и правильный додекаэдр имеют центр симметрии и несколько осей и плоскостей симметрии. Попробуйте подсчитать их число.



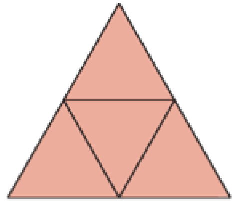
Плоскость α — плоскость симметрии правильного тетраэдра

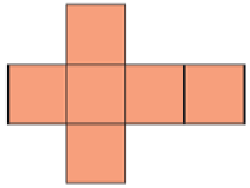
Рис. 93

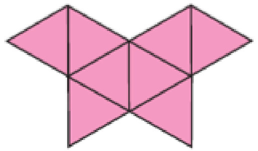


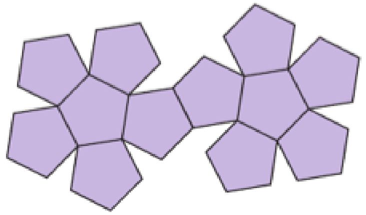
Прямые a и b — оси симметрии куба

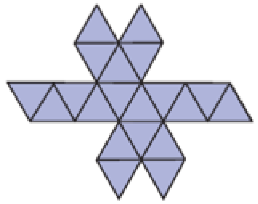
Рис. 94


Развёртка правильного тетраэдра


Развёртка куба


Развёртка правильного октаэдра


Развёртка правильного додекаэдра


Развёртка правильного икосаэдра