§ 2 Пирамида

32 Пирамида

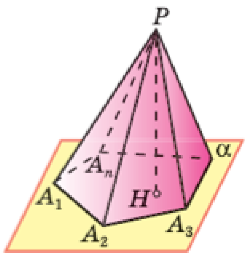
Рассмотрим многоугольник $A_1A_2 \ldots A_n$ и точку P, не лежащую в плоскости этого многоугольника. Соединив точку P отрезками с вершинами многоугольника, получим n треугольников (рис. 80):

$$PA_1A_2,\ PA_2A_3,\ \ldots,\ PA_nA_1. \qquad (1)$$

Многогранник, составленный из n-угольника $A_1A_2 \ldots A_n$ и n треугольников (1), называется **пирамидой**. Многоугольник $A_1A_2 \ldots A_n$ называется **основанием**, а треугольники (1) — **боковыми гранями** пирамиды. Точка P называется **вершиной** пирамиды, а отрезки $PA_1, PA_2, \ldots, PA_n$ — её **боковыми рёбрами**. Пирамиду с основанием $A_1A_2 \ldots A_n$ и вершиной P обозначают так: $PA_1A_2 \ldots A_n$ — и называют n-угольной пирамидой. На рисунке 81 изображены четырёхугольная и шестиугольная пирамиды. Ясно, что треугольная пирамида — это тетраэдр.

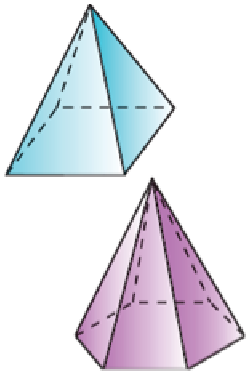
Перпендикуляр, проведённый из вершины пирамиды к плоскости основания, называется **высотой** пирамиды. На рисунке 80 отрезок PH является высотой пирамиды.

Площадью полной поверхности пирамиды называется сумма площадей всех её граней (т. е. основания и боковых граней), а **площадью боковой поверхности пирамиды** — сумма площадей её боковых граней. Очевидно, $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$.



Пирамида. Многоугольник $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ — основание пирамиды. Треугольники A_1PA_2, A_2PA_3, ..., A_nPA_1 — боковые грани, P — вершина пирамиды

Рис. 80



Четырёхугольная и шестиугольная пирамиды

Рис. 81

33 Правильная пирамида

Пирамида называется **правильной**, если её основание — правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания[1], является её высотой (рис. 82).

Докажем, что **все боковые рёбра правильной пирамиды равны, а боковые грани являются равными равнобедренными треугольниками**.

Рассмотрим правильную пирамиду $PA_1A_2 \ldots A_n$ (см. рис. 82). Сначала докажем, что все боковые рёбра этой пирамиды равны. Любое боковое ребро представляет собой гипотенузу прямоугольного треугольника, одним катетом которого служит высота PO пирамиды, а другим — радиус описанной около основания окружности (например, боковое ребро PA_1 — гипотенуза треугольника OPA_1, в котором $OP = h$, $OA_1 = R$). По теореме Пифагора любое боковое ребро равно $\sqrt{h^2 + R^2}$, поэтому

$$PA_1 = PA_2 = \ldots = PA_n.$$

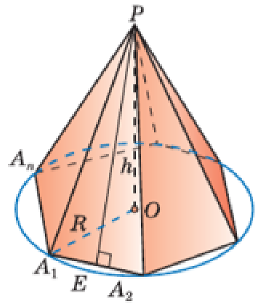


Рис. 82

Мы доказали, что боковые рёбра правильной пирамиды $PA_1A_2 \ldots A_n$ равны друг другу, поэтому боковые грани — равнобедренные треугольники. Основания этих треугольников также равны друг другу, так как $A_1A_2 \ldots A_n$ — правильный многоугольник. Следовательно, боковые грани равны по третьему признаку равенства треугольников, что и требовалось доказать.

Высота боковой грани правильной пирамиды, проведённая из её вершины, называется **апофемой**. На рисунке 82 отрезок PE — одна из апофем. Ясно, что все апофемы правильной пирамиды равны друг другу.

Докажем теорему о площади боковой поверхности правильной пирамиды.

Теорема

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему.

Доказательство

Боковые грани правильной пирамиды — равные равнобедренные треугольники, основания которых — стороны основания пирамиды, а высоты равны апофеме. Площадь S боковой поверхности пирамиды равна сумме произведений сторон основания на половину апофемы d. Вынося множитель $\frac{1}{2}d$ за скобки, получим в скобках сумму сторон основания пирамиды, т. е. его периметр. Теорема доказана.

34 Усечённая пирамида

Возьмём произвольную пирамиду $PA_1A_2 \dots A_n$ и проведём секущую плоскость β, параллельную плоскости α основания пирамиды и пересекающую боковые рёбра в точках $B_1, B_2, \dots, B_n$ (рис. 83). Плоскость β разбивает пирамиду на два многогранника. Многогранник, гранями которого являются n-угольники $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$ **(нижнее и верхнее основания)**, расположенные в параллельных плоскостях, и n четырёхугольников $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, ..., $A_nA_1B_1B_n$ **(боковые грани)**, называется **усечённой пирамидой**.

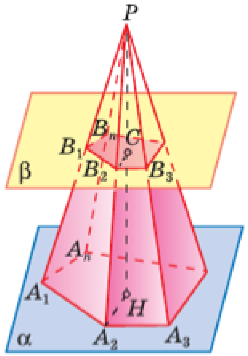
Отрезки A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n называются **боковыми рёбрами** усечённой пирамиды.

Усечённую пирамиду с основаниями $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$ обозначают так:

$$A_1A_2 \dots A_nB_1B_2 \dots B_n.$$

Перпендикуляр, проведённый из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания, называется **высотой** усечённой пирамиды. На рисунке 83 отрезок CH является высотой усечённой пирамиды.

Докажем, что **боковые грани усечённой пирамиды — трапеции**. Рассмотрим, например, боковую грань $A_1A_2B_2B_1$ (см. рис. 83). Стороны A_1A_2 и B_1B_2 параллельны, поскольку принадлежат прямым, по которым плоскость PA_1A_2 пересекается с параллельными плоскостями α и β. Две другие стороны A_1B_1 и A_2B_2 этой грани не параллельны — их продолжения пересекаются в точке P. Поэтому данная грань — трапеция. Аналогично можно доказать, что и остальные боковые грани — трапеции.



Усечённая пирамида

Рис. 83

Усечённая пирамида называется **правильной**, если она получена сечением правильной пирамиды плоскостью, параллельной основанию. Основания правильной усечённой пирамиды — правильные многоугольники, а боковые грани — равнобедренные трапеции (докажите это). Высоты этих трапеций называются **апофемами. Площадью боковой поверхности усечённой пирамиды** называется сумма площадей её боковых граней.

Теорема

Площадь боковой поверхности правильной усечённой пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему.

▼ Докажите эту теорему самостоятельно. △

58 Объём пирамиды

Теорема

Объём пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.

▼ **Доказательство**

Сначала докажем теорему для треугольной пирамиды, а затем — для произвольной пирамиды.

1. Рассмотрим треугольную пирамиду $OABC$ с объёмом V, площадью основания S и высотой h. Проведём ось Ox (рис. 143, *а*, где OM — высота пирамиды) и рассмотрим сечение $A_1B_1C_1$ пирамиды плоскостью, перпендикулярной к оси Ox, и, значит, параллельной плоскости основания. Обозначим через x координату точки M_1 пересечения этой плоскости с осью Ox, а через $S(x)$ — площадь сечения. Выразим $S(x)$ через S, h и x. Заметим, что треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC подобны. В самом деле, $A_1B_1 \parallel AB$, поэтому $\triangle OA_1B_1 \sim \triangle OAB$. Следовательно, $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{OA_1}{OA}$. Прямоугольные треугольники OA_1M_1 и OAM также подобны (они имеют общий острый угол с вершиной O). Поэтому $\frac{OA_1}{OA} = \frac{OM_1}{OM} = \frac{x}{h}$. Таким образом, $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{x}{h}$. Аналогично доказывается, что $\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{x}{h}$ и $\frac{C_1A_1}{CA} = \frac{x}{h}$.

Итак, треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC подобны с коэффициентом подобия $\frac{x}{h}$. Следовательно, $\frac{S(x)}{S} = \left(\frac{x}{h}\right)^2$, или $S(x) = \frac{S}{h^2}x^2$.

Применяя теперь основную формулу для вычисления объёмов тел при $a = 0$, $b = h$, получаем

$$V = \int_0^h S(x)\,dx = \int_0^h \frac{S}{h^2}x^2\,dx = \frac{S}{h^2}\int_0^h x^2\,dx = \frac{S}{h^2}\,\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^h = \frac{1}{3}S \cdot h.$$

2. Докажем теперь теорему для произвольной пирамиды с высотой h и площадью основания S. Такую пирамиду можно разбить на треугольные пирамиды с общей высотой h (на ри-

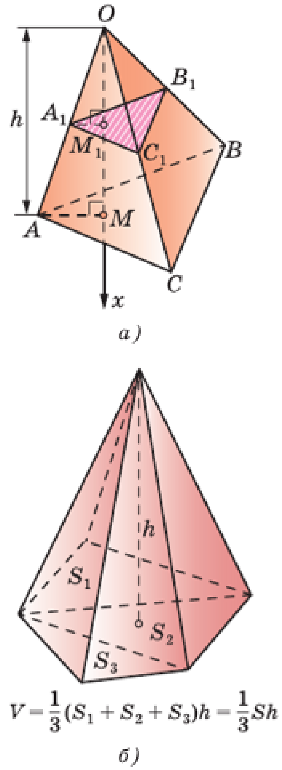


Рис. 143

сунке 143, *б* показано разбиение для выпуклой пятиугольной пирамиды). Выразим объём каждой треугольной пирамиды по доказанной нами формуле и сложим эти объёмы. Вынося за скобки общий множитель $\frac{1}{3}h$, получим в скобках сумму площадей оснований треугольных пирамид, т. е. площадь S основания исходной пирамиды. Таким образом, объём исходной пирамиды равен $\frac{1}{3}Sh$. Теорема доказана. △

Следствие

Объём V усечённой пирамиды, высота которой равна h, а площади оснований равны S и S_1, вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3}h\left(S + S_1 + \sqrt{S \cdot S_1}\right).$$

Пользуясь тем, что усечённая пирамида получается из обычной пирамиды путём отсечения от неё меньшей пирамиды и, следовательно, объём усечённой пирамиды равен разности объёмов данной пирамиды и отсечённой, выведите эту формулу самостоятельно.