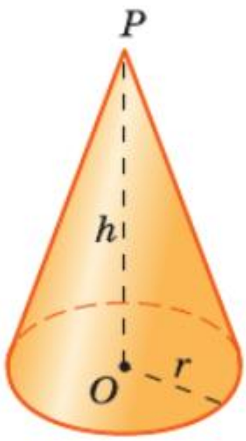
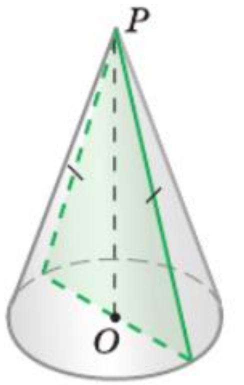
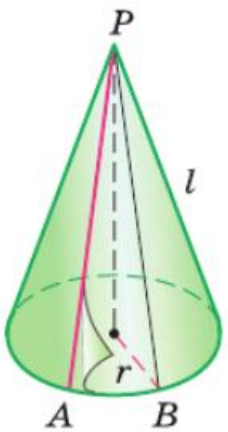
Конус. Площадь поверхности и объём конуса

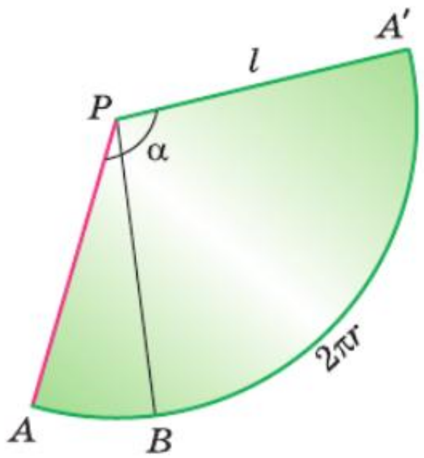


Конус

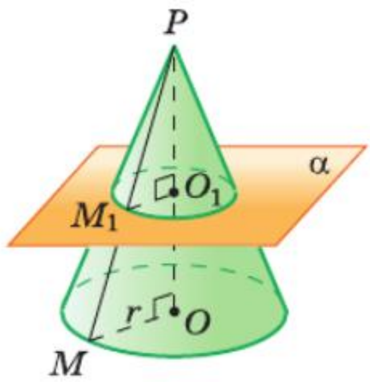


Осевое сечение конуса

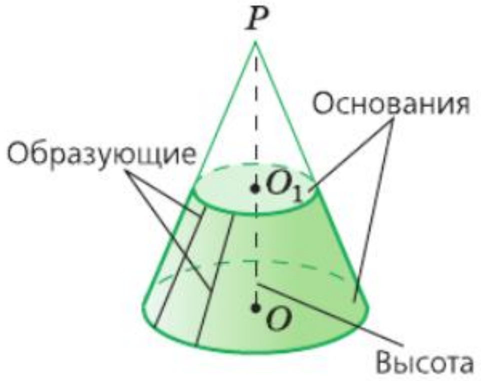




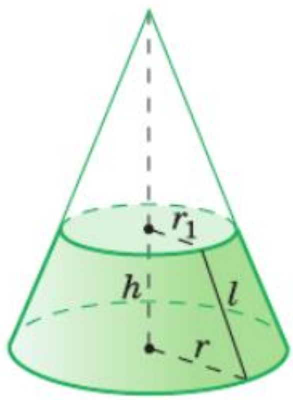
Развёртка боковой поверхности конуса



Сечение конуса плоскостью α, перпендикулярной к оси PO



Усечённый конус



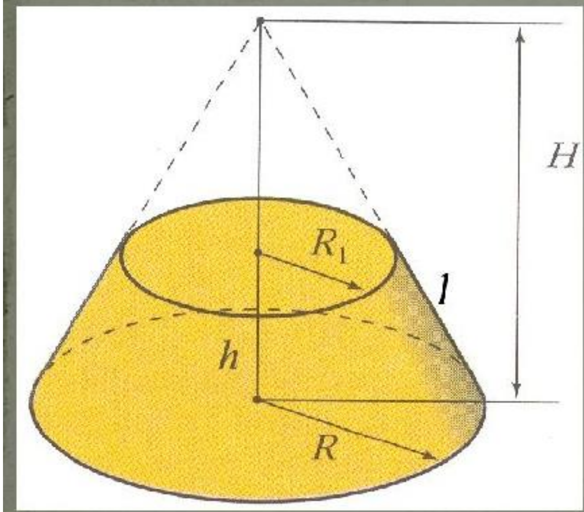
- Площадь боковой поверхности конуса $S_{\text{бок.пов.}} = \pi r l$, где r – радиус основания, l – образующая.

- Площадь полной поверхности конуса – эта сумма площади боковой поверхности и площади основания.

$$S_{\text{полн.пов.}} = \pi r l + \pi r^2 = \pi r(r + l)$$

- Объем конуса $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$, где h – высота конуса.

Усеченный прямой конус



- Формулы:

$$V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + R R_1 + R_1^2)$$

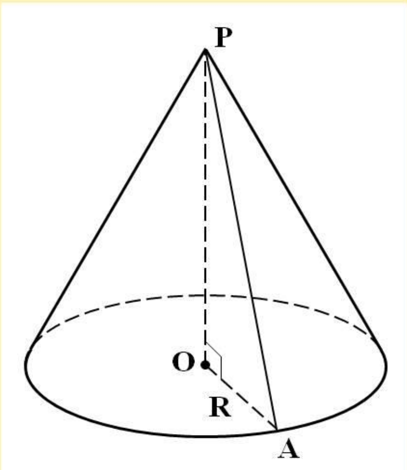
$$S_{\text{бок.пов.}} = \pi (R + R_1) l$$

$$S_{\text{полн.пов.}} = \pi (R + R_1) l + \pi R^2 + \pi r^2$$

Здесь h – высота усеченного конуса; R и R_1 – радиусы его верхнего и нижнего оснований; l – его образующая

Примеры решения задач

Задача 1. Высота конуса равна 12, а радиус основания равен 5. Найдите площадь полной поверхности конуса. В ответе запишите S/π.



Образующая конуса:

$$l = PA = \sqrt{12^2 + 5^2} =$$

$$= \sqrt{169} = 13$$

$$S_{\text{кон.}} = \pi r^2 + \pi r l =$$

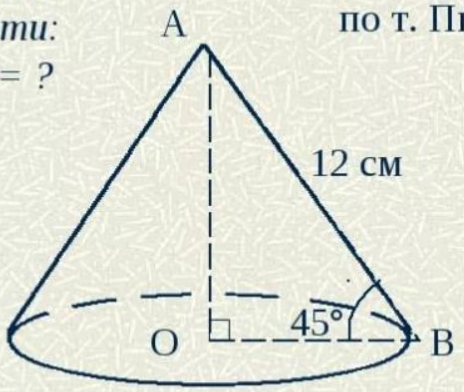
$$= \pi (r^2 + r l)$$

$$S_{\text{кон.}} = \pi (5^2 + 5 \cdot 13) = 90\pi$$

$$\frac{S}{\pi} = 90. \quad \textit{Ответ}: 90.$$

Образующая конуса, равная 12 см, наклонена к плоскости основания под углом 45°. Найдите площадь основания конуса.

Дано: конус
$l = 12$ *см*
$\alpha = 45°$
Найти:
$S_{осн.} = ?$



Решение:

1. Рассмотрим ΔOAB – прямоугольный:
$\angle OBA = \angle OAB = 45° \Rightarrow OA = OB$
по т. Пифагора $AB^2 = OA^2 + OB^2$

$144 = 2 \cdot OB^2$
$OB = 6\sqrt{2}$

2. $S_{осн.} = \pi r^2$
$r = OB = 6\sqrt{2}$
$\Rightarrow S_{осн.} = 72\pi$ см^2.

Ответ: 72π см^2.

Задача 1

Высота конуса равна 4, а диаметр основания - 6. Найдите образующую конуса.

Решение

1) Чертим треугольник *SAO* (выше есть готовый чертеж).
2) Делаем краткую запись задачи, соотнося всё с чертежом.
Дано: $SO = h = 4$, $AC = 2r = 6$.
Найти: $SA = l = ?$
3) Подставляем значения с чертежа в известные формулы:
$l^2 = r^2 + h^2$; $r = 6/2 = 3$;
$l^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$; $l^2 = 25$; $l = 5$.

Ответ: **5**

Задача 2.

Высота конуса равна 4, а длина образующей - 5. Найдите диаметр основания конуса.

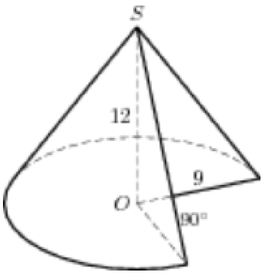
Решение

Порядок наших действий такой же, как в предыдущей задаче: чертеж, краткая запись, формулы. Только в конце неизвестная величина оказывается в правой части равенства, что несколько удлиняет вычисления.
$SO = h = 4$, $SA = l = 5$, $AC = 2r = ?$
$l^2 = r^2 + h^2$;
$5^2 = r^2 + 4^2$;
$5^2 - 4^2 = r^2$ или $r^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$;
$r^2 = 9$; $r = 3$; $AC = 2r = 2 \times 3 = 6$.

Ответ: **6**

1. Задание

Найдите объем V части конуса, изображенной на рисунке. В ответе укажите V/π.



Чтобы найти объем заявленной части, заметим, что у конуса вырезана четвертая часть (т.к. 90° - это $\frac{1}{4}$ часть от 360°).

Значит, можно найти объем конуса по формуле $V_{\text{кон}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$, затем вычесть $\frac{1}{4}$ найденного объема.

$$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 9^2 \cdot 12 = 324\pi.$$

$$\frac{1}{4}V_{\text{кон}} = 324\pi : 4 = 81\pi.$$

Тогда объем данной фигуры равен $V = 324\pi - 81\pi = 243\pi$.

Так как в ответе нужно указать $\frac{V}{\pi}$, то ответ: 243.

Ответ: 243

2. Задание

Даны два конуса. Радиус основания и высота одного конуса равны соответственно 6 и 3, а второго — 1 и 5. Во сколько раз объём первого конуса больше объёма второго?

Объем первого конуса $V_1 = \frac{1}{3} \cdot 36\pi \cdot 3 = 36\pi$, объем второго конуса $V_2 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5 = \frac{5}{3}\pi$.

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{36\pi}{\frac{5}{3}\pi} = \frac{108}{5} = 21,6.$$

Ответ: 21,6

3. Задание

Объём конуса равен 968π, а его высота равна 24.

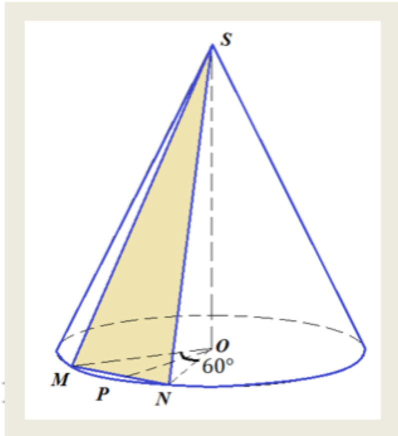
Найдите радиус основания конуса.

Из формулы *объёма конуса* $V_{\text{кон.}} = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$ выразим и далее вычислим искомый радиус r:

$$r = \sqrt{\frac{3V_{\text{кон.}}}{\pi h}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 968\pi}{\pi \cdot 24}} = \sqrt{121} = 11.$$

Ответ: 11

Задача Радиус основания конуса с вершиной S равен 6, а длина его образующей равна 9. На окружности основания конуса выбраны точки M и N, делящие окружность на две дуги, длины которых относятся как 1:5. Найдите площадь сечения конуса плоскостью SMN.



Длины дуг окружности пропорциональны центральным углам, поэтому $x + 5x = 360°$, $x = 60°$. Таким образом, поскольку радиус основания конуса равен 6, то треугольник MON правильный и длина хорды $MN = 6$. Далее просто пользуемся формулой Герона для определения площади сечения:

$$p = \frac{9+9+6}{2} = 12$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{12(12-9)^2(12-6)} =$$

Ответ: $S = 18\sqrt{2}$

Решение задач из учебника

Задача 354 б). Высота конуса равна 10 см. Найдите площадь сечения, проходящего через вершину конуса и хорду основания, стягивающую дугу в 60°, если плоскость сечения образует с плоскостью основания конуса угол 45°.

Решение.

1) Так как хорда AB основания конуса стягивает дугу в 60° (рис. 4.5), то она равна радиусу основания: $AB = OA = OB$.

2) Проведём $OC \perp AB$ и соединим отрезком точки C и M. Тогда $AB \perp CM$ (по теореме о трёх перпендикулярах) и $\angle MCO$ — линейный угол двугранного угла с ребром AB. По условию $\angle MCO = 45^\circ$.

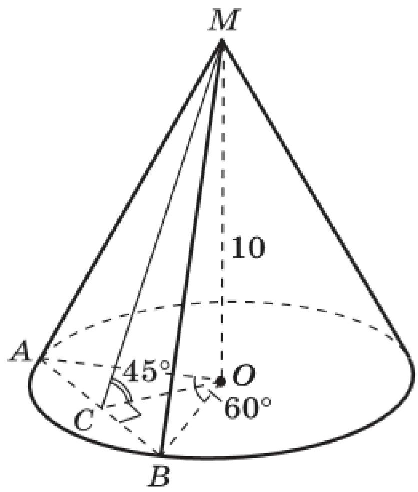


Рис. 4.5

3) Из $\triangle MCO$ имеем

$CO = MO = 10$ см, $MC = 10\sqrt{2}$ см.

4) Из $\triangle BOC$ получаем

$$BO = \frac{OC}{\cos 30^\circ} = \frac{20\sqrt{3}}{3} \text{ см.}$$

5) $S_{MAB} = \frac{1}{2} AB \cdot MC =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{20\sqrt{3}}{3} \cdot 10\sqrt{2} \text{ см}^2 = \frac{100\sqrt{6}}{3} \text{ см}^2.$$

Задача 368. Радиусы оснований усечённого конуса равны R и r, где $R > r$, а образующая составляет с плоскостью основания угол в 45°. Найдите площадь осевого сечения.

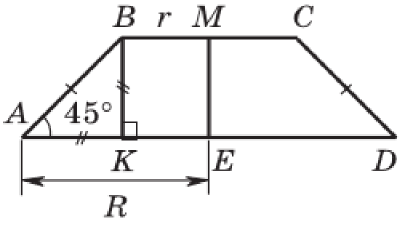


Рис. 4.7

Решение.

1) На рисунке 4.7 изображено осевое сечение данного усечённого конуса — равнобедренная трапеция $ABCD$. Пусть $BK \perp AD$, точки M и E — середины отрезков BC и AD, т. е. точки M и E — центры оснований усечённого конуса. Тогда $BM = r$, $AE = R$, $KE = BM = r$, $AK = R - r$.

2) Из $\triangle ABK$ имеем $BK = AK = R - r$ (так как острый угол прямоугольного треугольника равен 45°, то катеты BK и AK равны).

3) $$S_{\text{сеч}} = S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot BK = \frac{2r + 2R}{2} \cdot (R - r) =$$

$$= (R + r)(R - r) = R^2 - r^2.$$