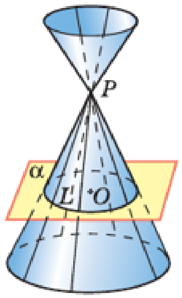
§ 2 Конус

40 Понятие конуса

Рассмотрим окружность L с центром O и прямую OP, перпендикулярную к плоскости α этой окружности. Через точку P и каждую точку окружности проведём прямую. Поверхность, образованная этими прямыми, называется **конической поверхностью** (рис. 106), а сами прямые — **образующими конической поверхности**. Точка P называется **вершиной**, а прямая OP — **осью конической поверхности**.

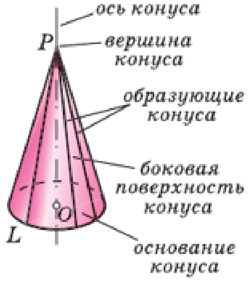
Тело, ограниченное конической поверхностью и кругом с границей L, называется **конусом** (рис. 107). Круг называется **основанием конуса**, вершина конической поверхности — **вершиной конуса**, отрезки образующих, заключённые между вершиной и основанием, — **образующими конуса**, а образованная ими часть конической поверхности — **боковой поверхностью конуса**. Ось конической поверхности называется **осью конуса**, а её отрезок, заключённый между вершиной и основанием, — **высотой конуса**. Отметим, что все образующие конуса равны друг другу (обоснуйте это).

Конус может быть получен вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов. На рисунке 108 изображён конус, полученный вращением прямоугольного треугольника ABC вокруг катета AB. При этом боковая поверхность конуса образуется вращением гипотенузы AC, а основание — вращением катета BC.



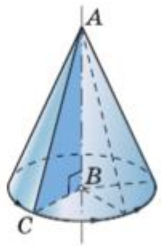
Коническая поверхность

Рис. 106



Конус

Рис. 107



Конус получен вращением прямоугольного треугольника ABC вокруг катета AB

Рис. 108

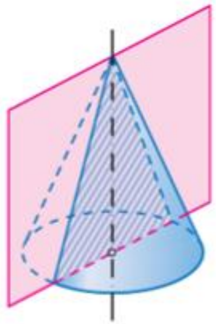
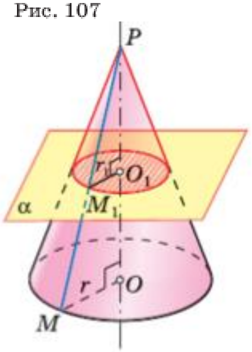

Осевое сечение конуса — равнобедренный треугольник

Рис. 109



Сечение конуса плоскостью α, перпендикулярной к его оси, — круг с центром O_1 радиуса $r_1 = \frac{PO_1}{PO} r$

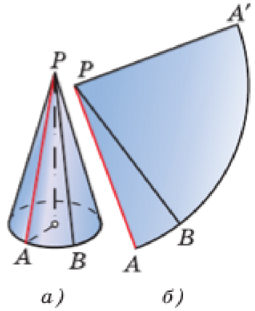
Рис. 110

Рассмотрим сечения конуса различными плоскостями. Если секущая плоскость проходит через ось конуса (рис. 109), то сечение представляет собой равнобедренный треугольник, основание которого — диаметр основания конуса, а боковые стороны — образующие конуса. Это сечение называется **осевым**.

Если секущая плоскость перпендикулярна к оси OP конуса (рис. 110), то сечение конуса представляет собой круг с центром O_1, расположенным на оси конуса. Радиус r_1 этого круга равен $\frac{PO_1}{PO} r$, где r — радиус основания конуса, что легко усмотреть из подобия прямоугольных треугольников POM и PO_1M_1. Доказательство этого факта приведено в решении задачи 355.

41 Площадь поверхности конуса

Боковую поверхность конуса, как и боковую поверхность цилиндра, можно развернуть на плоскость, разрезав её по одной из образующих (рис. 111, *а*, *б*). **Развёрткой боковой поверхности конуса** является круговой сектор (см. рис. 111, *б*), радиус которого равен образующей конуса, а длина дуги сектора равна длине окружности основания конуса.



Развёртка боковой поверхности конуса

Рис. 111

За площадь боковой поверхности конуса принимается площадь её развёртки. Выразим площадь $S_{бок}$ боковой поверхности конуса через его образующую l и радиус основания r. Площадь кругового сектора — развёртки боковой поверхности конуса (см. рис. 111, *б*) — равна $\frac{\pi l^2}{360}\alpha$, где α — градусная мера дуги ABA', поэтому

$$S_{бок} = \frac{\pi l^2}{360}\alpha. \qquad (1)$$

Выразим α через l и r. Так как длина дуги ABA' равна $2\pi r$ (длине окружности основания конуса), то $2\pi r = \frac{\pi l}{180}\alpha$, откуда $\alpha = \frac{360 r}{l}$. Подставив это выражение в формулу (1), получим

$$S_{бок} = \pi r l. \qquad (2)$$

Таким образом, **площадь боковой поверхности конуса равна произведению половины длины окружности основания на образующую.**

Площадью полной поверхности конуса называется сумма площадей боковой поверхности и основания. Для вычисления площади $S_{\text{кон}}$ полной поверхности конуса получается формула

$$S_{\text{кон}} = \pi r(l + r).$$

59 Объём конуса

Теорема

Объём конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.

▼ **Доказательство**

Рассмотрим конус с объёмом V, радиусом основания R, высотой h и вершиной в точке O. Введём ось Ox так, как показано на рисунке 144 (OM — ось конуса). Произвольное сечение конуса плоскостью, перпендикулярной к оси Ox, является кругом с центром в точке M_1 пересечения этой плоскости с осью Ox (п. 40). Обозначим радиус этого круга через R_1, а площадь сечения через $S(x)$, где x — координата точки M_1. Из подобия прямоугольных треугольников OM_1A_1 и OMA следует, что

$$\frac{OM_1}{OM} = \frac{R_1}{R}, \quad \text{или} \quad \frac{x}{h} = \frac{R_1}{R},$$

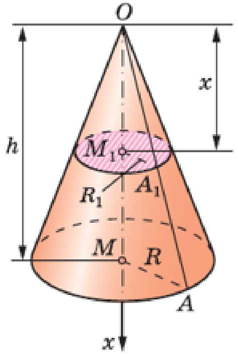


Рис. 144

откуда $R_1 = \frac{R}{h}x$. Так как $S(x) = \pi R_1^2$, то

$$S(x) = \frac{\pi R^2}{h^2}x^2.$$

Применяя основную формулу для вычисления объёмов тел при $a = 0$, $b = h$, получаем

$$V = \int_0^h \frac{\pi R^2}{h^2}x^2\,dx = \frac{\pi R^2}{h^2}\int_0^h x^2\,dx = \frac{\pi R^2}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^h = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

Площадь S основания конуса равна πR^2, поэтому $V = \frac{1}{3}Sh$. Теорема доказана. △

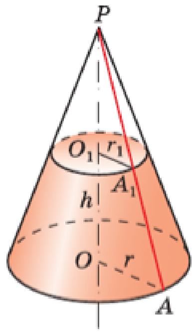


Рис. 145

Следствие

Объём V усечённого конуса, высота которого равна h, а площади оснований равны S и S_1, вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3}h\left(S + S_1 + \sqrt{S \cdot S_1}\right).$$