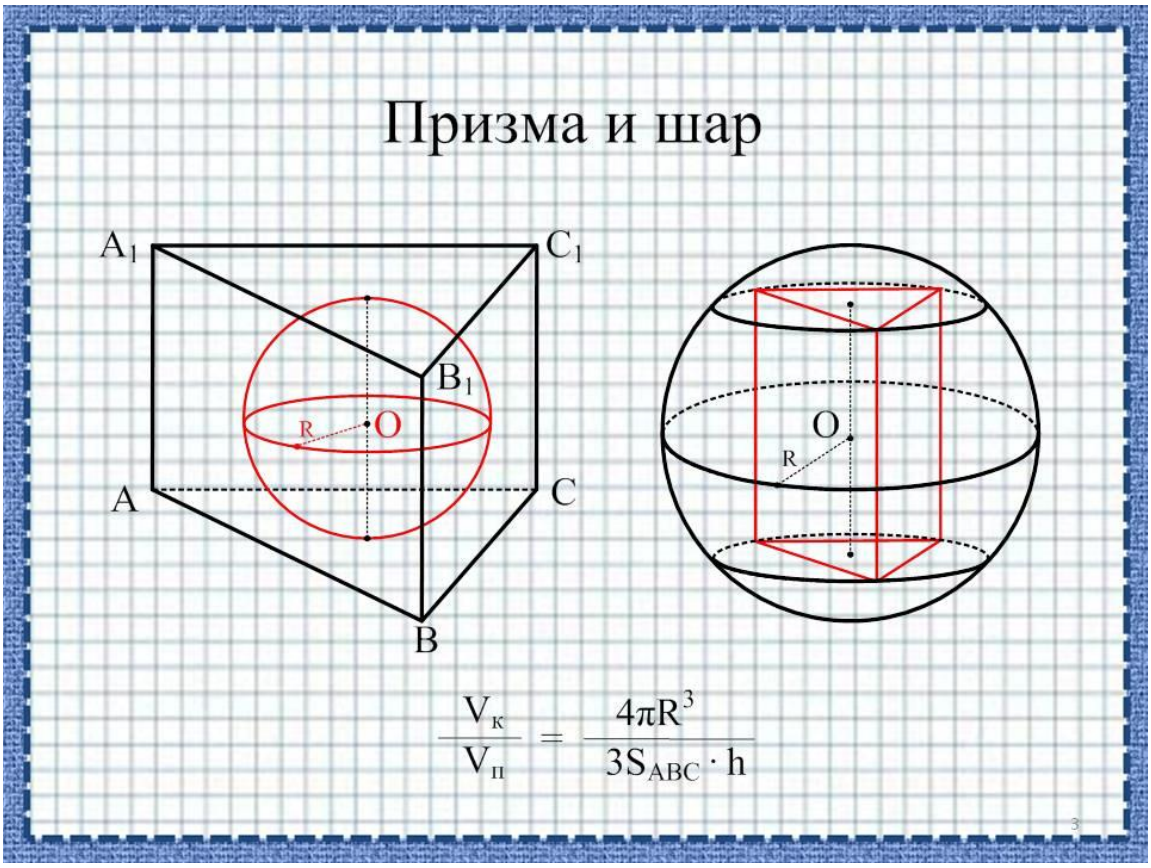
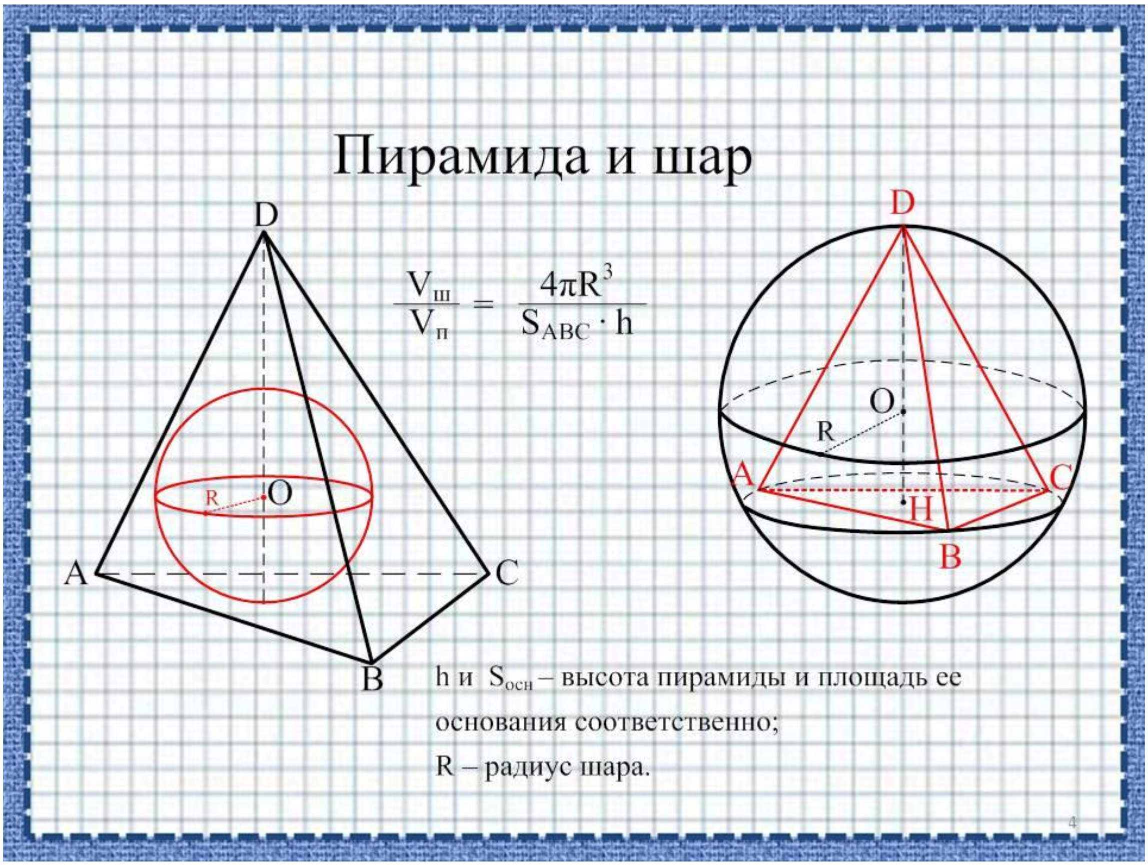
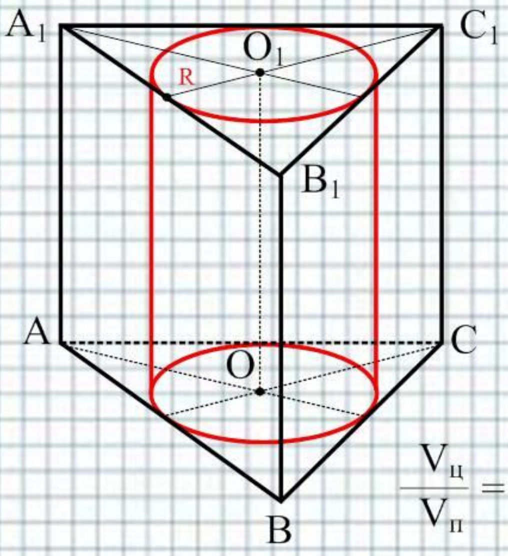
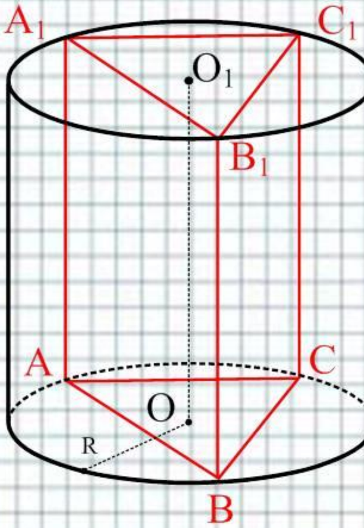
# Вписанные и описанные тела.
# Отношение площадей поверхностей и объемов подобных тел



# Призма и цилиндр

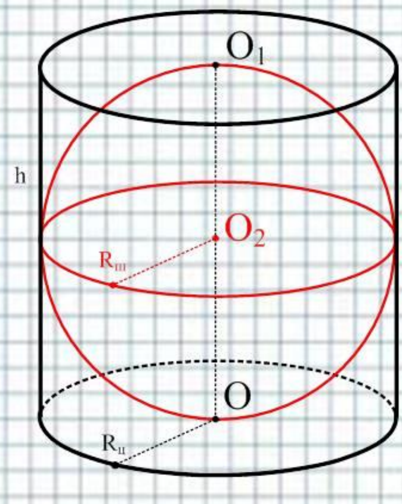


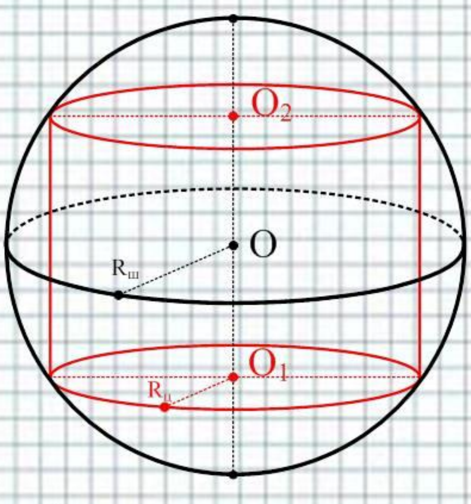




$$\frac{V_ц}{V_п} = \frac{\pi R^2}{S_{ABC}}$$



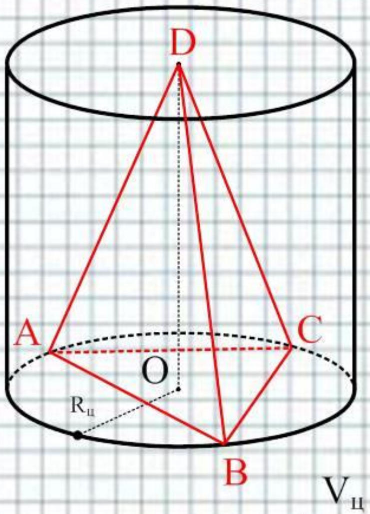
# Цилиндр и шар

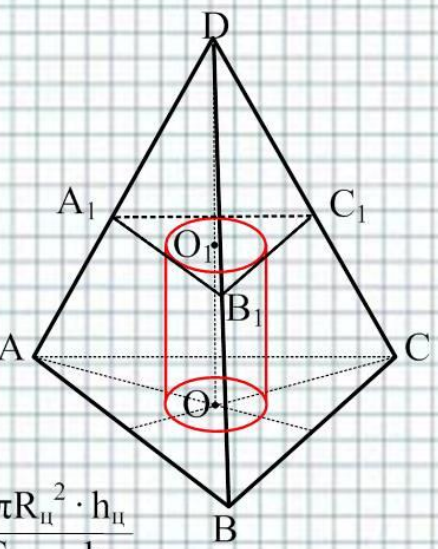



$$\frac{V_ш}{V_ц} = \frac{4{R_ш}^3}{3{R_ц}^2 \cdot h}$$

# Цилиндр и пирамида

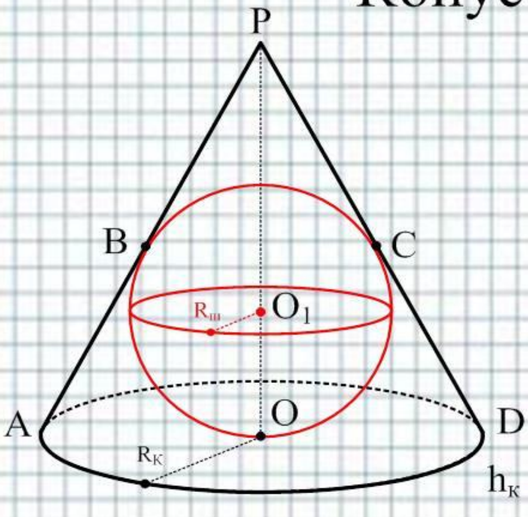


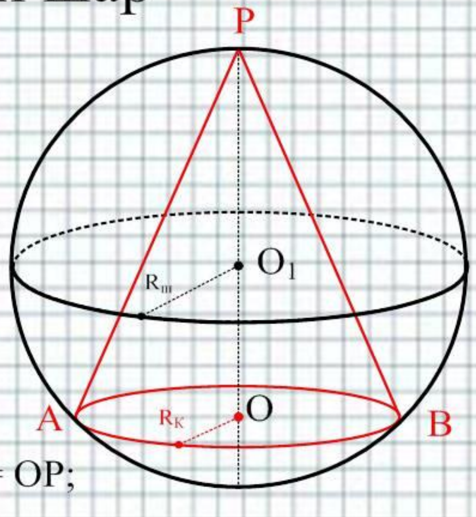




$$\frac{V_ц}{V_п} = \frac{3\pi R_ц{}^2 \cdot h_ц}{S_{ABC} \cdot h_k}$$



# Конус и шар

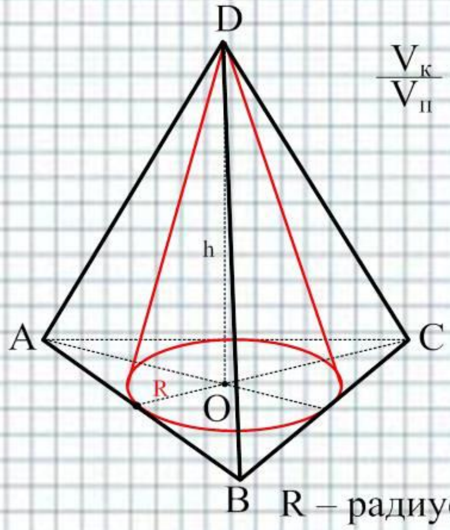


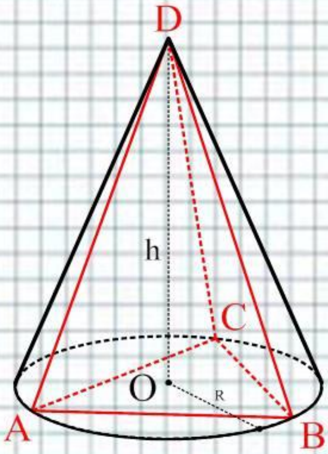

$h_к = OP;$

$$\frac{V_ш}{V_к} = \frac{4R_ш{}^3}{h_К \cdot R_К{}^2}$$

# Пирамида и конус




$$\frac{V_к}{V_п} = \frac{\pi R^2}{S_{ABC}}$$

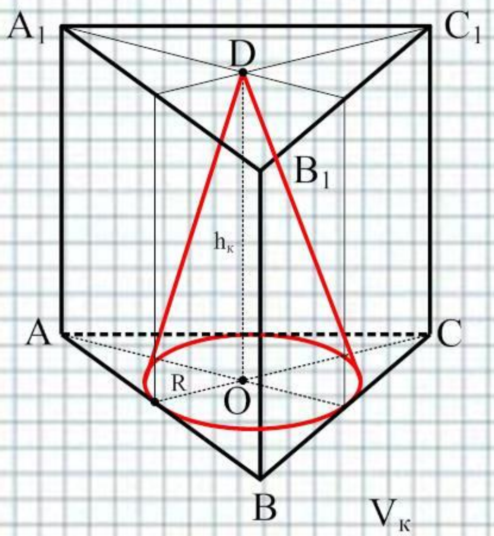


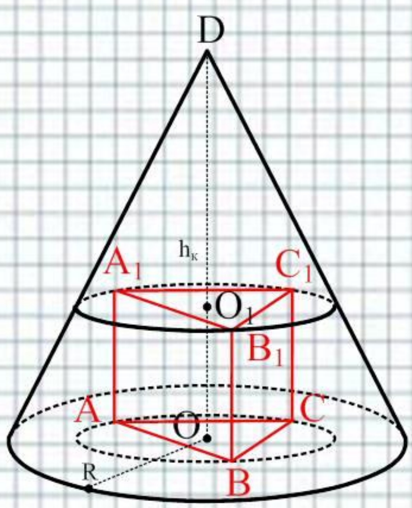

R – радиус основания конуса

h – высота конуса и пирамиды

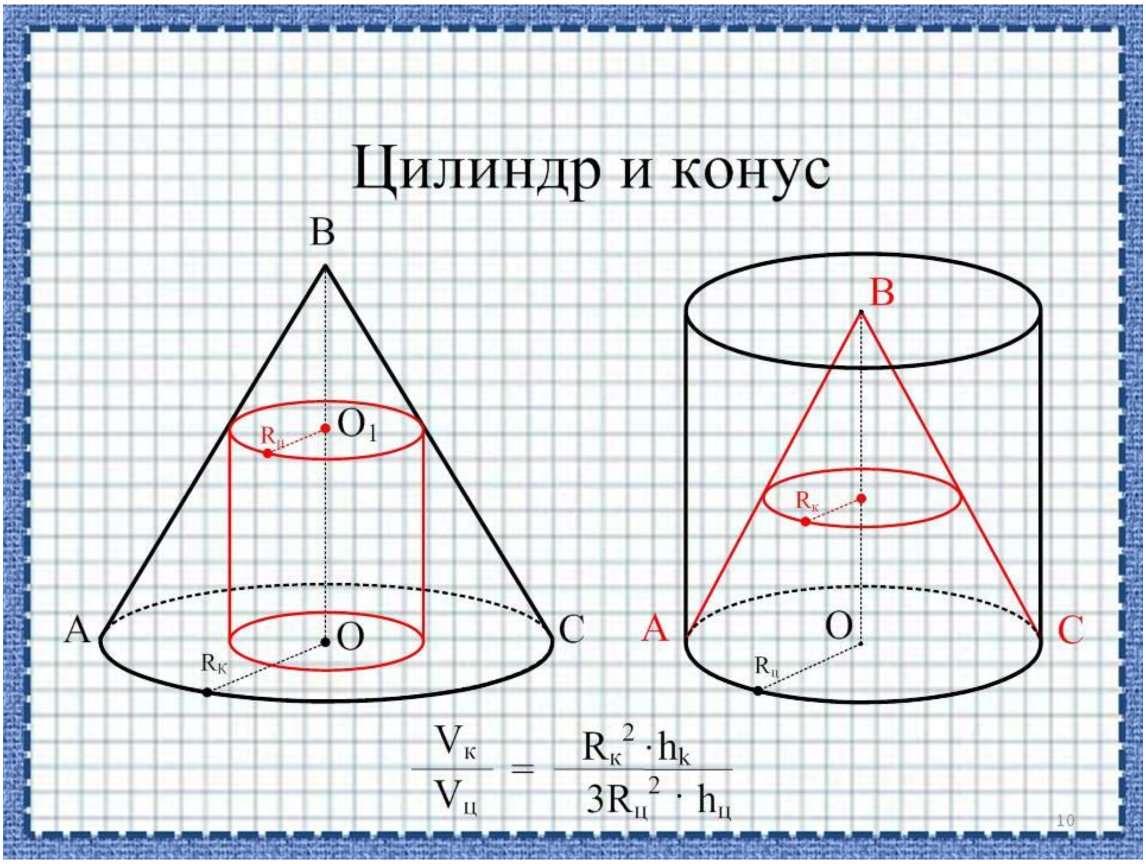


# Призма и конус



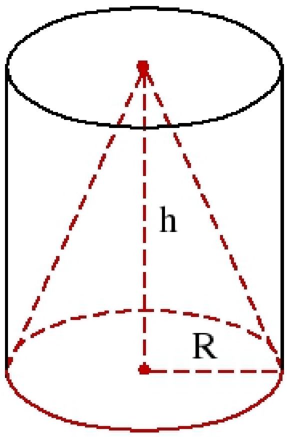

$$\frac{V_к}{V_п} = \frac{\pi R^2 \cdot h_к}{3S_{ABC} \cdot h_п}$$




## Примеры решения задач

Задача

**Дано:**
цилиндр, конус
R — общий радиус
h — общая высота
$V_{к.} = 42$
**Найти:** $V_{ц.}$




**Решение:**
Объём конуса:

$$V_{к.} = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot h = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot h$$

Объём цилиндра:

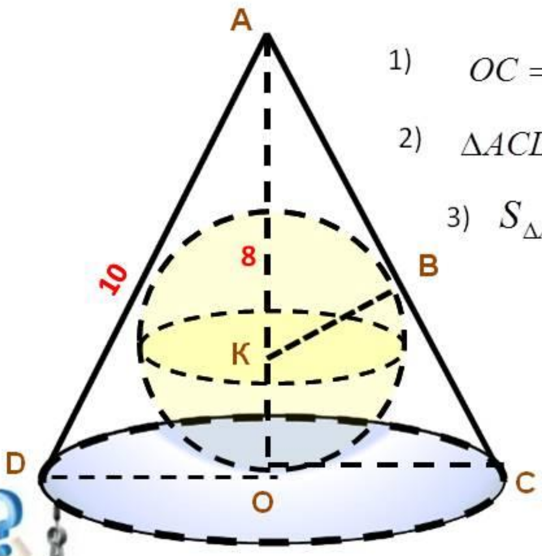
$$V_{ц.} = S_{осн.} \cdot h = \quad R^2 \cdot h$$

$$\frac{V_{ц.}}{V_{к.}} = \frac{\pi R^2 \cdot h}{\frac{1}{3} \pi R^2 \cdot h} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

$V_{ц.} = 3\ V_{к.}$ fl $V_{ц.} = 3 \cdot 42 = 126$

**Ответ:** $V_ц = 126$

## 1 Высота конуса 8, образующая 10. Найдите радиус вписанного шара




**Решение:**

1) $OC=\sqrt{AC^2-AO^2}=\sqrt{100-64}=6$

2) $\Delta ACD: AC=AD \Rightarrow AO-\text{медиана}, DC=12$

3) $S_{\Delta ADC}=pr=p\cdot KB, r=\dfrac{S}{p}$

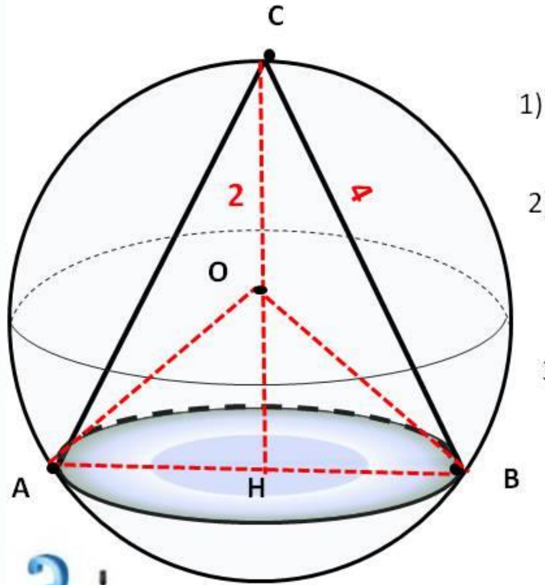
4) $S_{\Delta ACD}=\dfrac{1}{2}DC\cdot AO=\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 12=48$

5) $p=\dfrac{AD+AC+CD}{2}=16$

$r=KB=\dfrac{48}{16}=3$



## 2 Высота конуса равна 2, образующая равна 4. Найдите радиус описанного шара.




**Решение:**

1) $S_{\Delta ABC}=\dfrac{abc}{2R}, R=AO=\dfrac{abc}{2S_\Delta}$

2) $\Delta CBH:$

$r=BH=\sqrt{CB^2-CH^2}=\sqrt{12}$

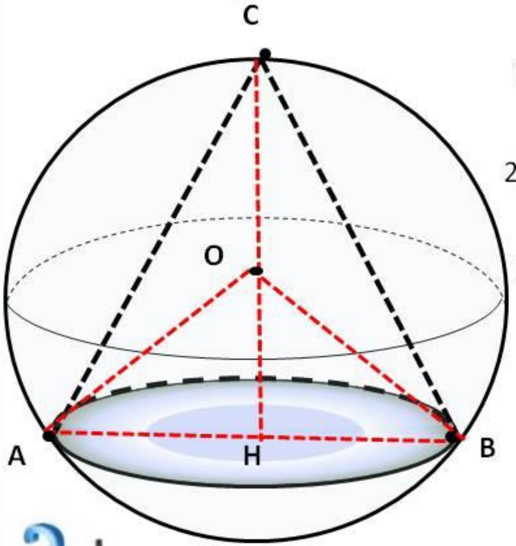
3) $\Delta ABC: AC=CB=4$

$AH=HB=2\cdot 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

4) $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot CH=4\sqrt{3}$

5) $R_ш=OA=\dfrac{4\cdot 4\cdot 4\sqrt{3}}{4\cdot 4\sqrt{3}}=4$

## 3 В шар вписан конус, образующая которого равна диаметру основания. Найдите отношение полной поверхности этого конуса к поверхности шара




Решение:

1) $l_к = 2r_к$

2) $\dfrac{S_к}{S_ш} = \dfrac{\pi r(r+l)}{4\pi R^2} = \dfrac{r(r+2r)}{4R^2} = \dfrac{3r^2}{4R^2}$

3) $\Delta ABC$ – равносторонний

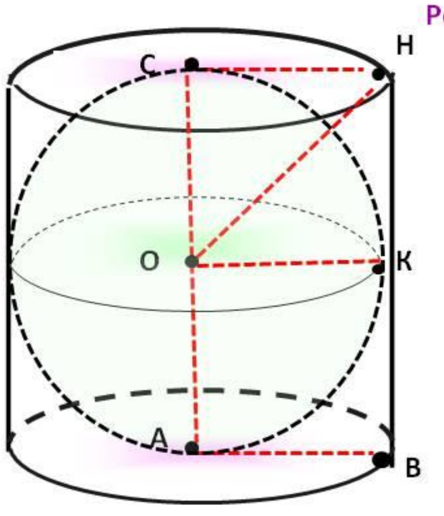
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB^2 Sin\,60 = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

4) $R_ш = OA = \dfrac{abc}{4S_\Delta} = \dfrac{l}{\sqrt{3}}$

5) $\dfrac{S_k}{S_ш} = \dfrac{3r^2 \cdot 3}{4 \cdot 2^2 r^2} = \dfrac{9}{16} = 0{,}5625$



## 4 Площадь поверхности шара равна 330. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, описанного около шара.




Решение:

1) $h_ц = d_ш = 2 \cdot OA$

$R_ш = R_ц$

2) $S_{п.п.ц} = 2\pi \cdot R_ц(h_ц + R_ц) =$

$= 2\pi R_ц(2R_ц + R_ц) =$

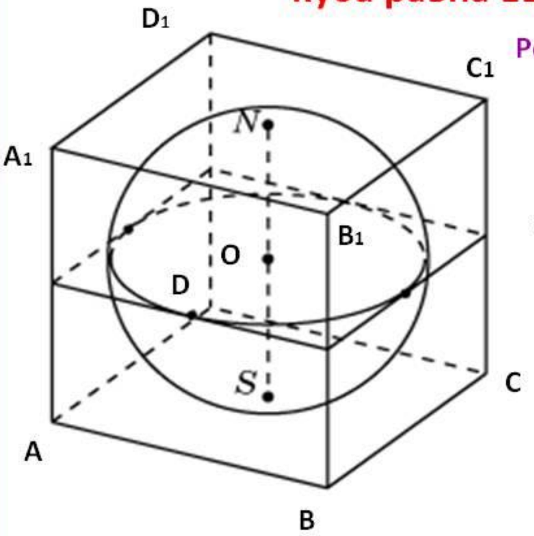
$= 6\pi R_ц^2 = 6\pi R_ц^2$

3) $S_ш = 4\pi \cdot OA^2; 330 = 4\pi \cdot OA^2$

$$OA^2 = \frac{330}{4\pi}$$

4) $S_{п.п.ц} = 6\pi \cdot \dfrac{330}{4\pi} = 495$

**5** В куб вписан шар. Найдите площадь поверхности шара, если площадь полной поверхности куба равна 1170/π




Решение:

1) $S_{п.ш} = 4\pi R^2, R_ш = \frac{1}{2} SN = \frac{1}{2} AA_1$

2) $S_{п.п.к} = 6a^2, \frac{1170}{\pi} = 6 \cdot AA_1^2$

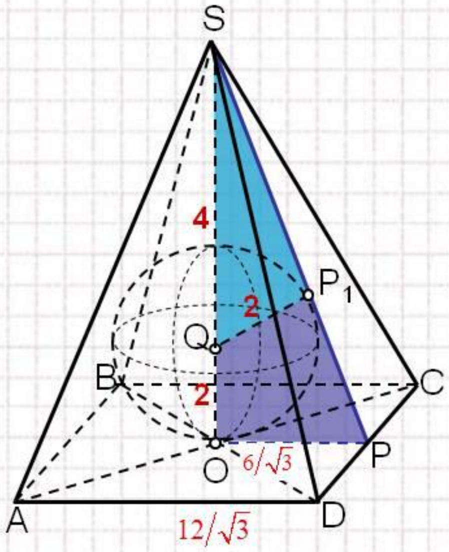
3) $AA_1 = \sqrt{\frac{1170}{6\pi}}$

4) $R_ш = SO = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1170}{6\pi}}$

5) $S_ш = 4\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1170}{6\pi} = 195$



**1** **В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар, объем которого 32π/3. Найдите объем пирамиды, если её высота равна 6.**




**Решение.** $\boxed{V = \frac{1}{3} S_о \cdot H}$

1) $V_ш = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{32}{3}\pi$, тогда $R^3 = 8$, $R_ш = 2$.

2) $SQ = SO - OQ$, $SQ = 6 - 2 = 4$.

3) $\Delta SP_1Q$ – прямоугольный, $SP_1 = \sqrt{16-4} = 2\sqrt{3}$.

4) $\Delta SP_1Q \backsim \Delta SOP$ ($\angle P_1 = \angle O = 90°$, $\angle S$ – общий),

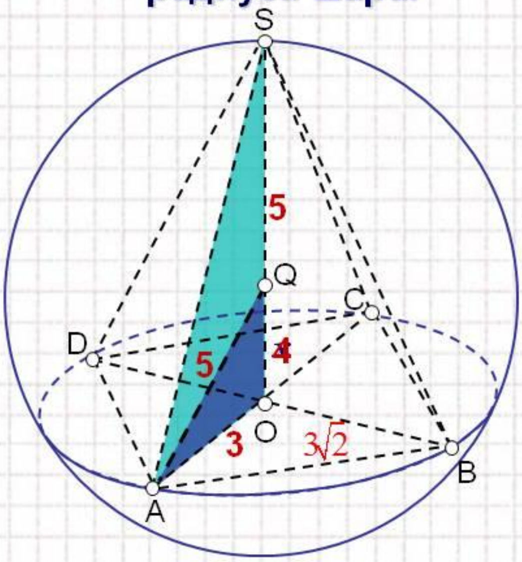
$\frac{QP_1}{OP} = \frac{SP_1}{SO}$, откуда $OP = \frac{QP_1 \cdot SO}{SP_1} = \frac{2 \cdot 6}{2\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}}$.

5) Тогда сторона основания пирамиды вдвое больше, и равна $\frac{12}{\sqrt{3}}$.

6) $V = \frac{1}{3} S_о \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{12}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot 6 = 96.$

**Ответ: 96.**

**2** **В шар, объём которого $\frac{500}{3}\pi$ , вписана правильная четырехугольная пирамида. Найдите объём пирамиды, если её боковое ребро равно $3\sqrt{10}$ , а высота больше радиуса шара.**




**Решение.** $\boxed{V=\frac{1}{3}S_o\cdot H}$

1) $V_ш=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{500}{3}\pi,$ тогда $R^3=125,\ R_ш=5.$

2) Пусть OQ = $x$, тогда из $\Delta$AOQ выразим сторону AO: $AO=\sqrt{25-x^2}.$

3) Составим теорему Пифагора для $\Delta$ASO:

$AS^2=AO^2+SO^2,\ \left(3\sqrt{10}\right)^2=\left(25-x^2\right)+\left(5+x\right)^2.$

Откуда находим OQ = 4.

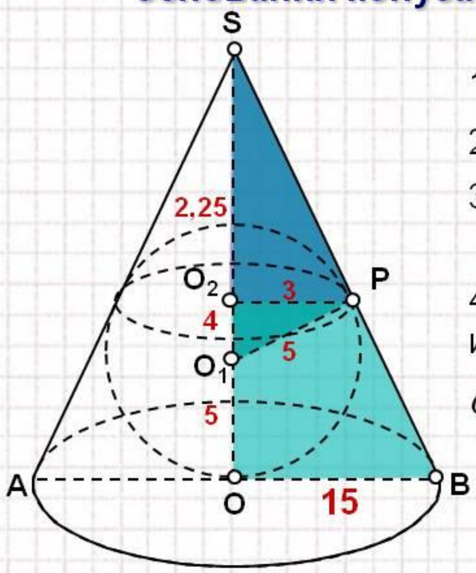
4) Тогда SO = 5+4=9, и AO = 3.

5) В основании пирамиды квадрат, со стороной $a$, равной $AO\sqrt{2}$, т.е. $a=3\sqrt{2}.$

6) $V=\frac{1}{3}S_o\cdot H=\frac{1}{3}\cdot\left(3\sqrt{2}\right)^2\cdot 9=54.$

**Ответ: 54.**

**3** **Площадь поверхности сферы, вписанной в конус, равна 100π. Длина окружности, по которой сфера касается поверхности конуса, равна 6π. Найдите радиус основания конуса.**




**Решение.**

1) C = $2\pi r$ = $6\pi$, тогда $r$ = $O_2P$ = 3.

2) $S_{сферы}$ = $4\pi R^2$ =$100\pi$, тогда R = $O_1P$ = 5.

3) Из $\Delta O_1O_2P$ по теореме Пифагора находим:

$O_1O_2=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{25-9}=4.$

4) В $\Delta O_1PS$ отрезок $PO_2$ высота, проведенная из вершины прямого угла, значит

$O_2P=\sqrt{SO_2\cdot O_1O_2}$, т.е. $3=\sqrt{SO_2\cdot 4},\ SO_2=\frac{9}{4}=2{,}25.$

5) Найдем высоту конуса

SO= $SO_2$ +$O_2O_1$+$O_1O$ = 2,25 + 4 + 5 = 11,25.

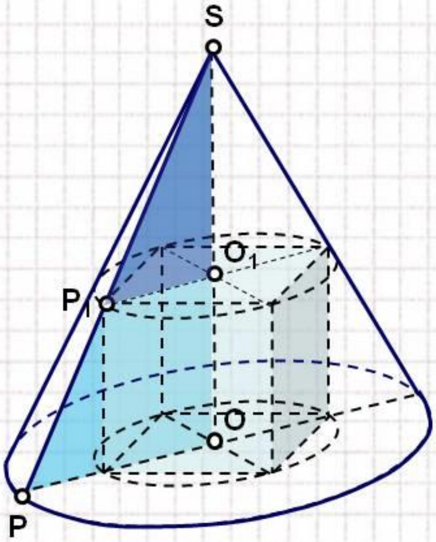
6) $\Delta\ SO_2P\backsim\Delta SOB$ ($\angle O_2$=$\angle O$=90°, $\angle S$ – общий),

$\frac{SO_2}{SO}=\frac{O_2P}{OB}$, откуда $OB=\frac{O_2P\cdot SO}{SO_2}=\frac{11{,}25\cdot 3}{2{,}25}=15.$

**Ответ: 15.**

4

**В конус с образующей $6\sqrt{6}$ и высотой 12 вписан куб. Найдите объём куба.**




**Решение.**

1) Из прямоугольного $\Delta SOP$ находим:

$OP = \sqrt{SP^2 - SO^2} = \sqrt{216 - 144} = 6\sqrt{2}.$

2) $a$ – сторона куба, тогда $a = R\sqrt{2}.$

3) Выразим через $a$: $O_1P_1 = \dfrac{a}{\sqrt{2}},$

$OO_1 = a, \ SO_1 = SO - SO_1 = 12 - a.$

4) $\Delta\, SO_1P_1 \backsim \Delta SOP$ ($\angle O_1 = \angle O = 90°$, $\angle S$ – общий),

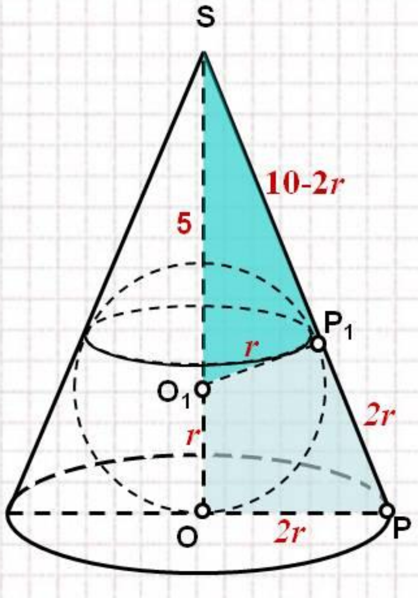
$\dfrac{SO_1}{SO} = \dfrac{P_1O_1}{PO}, \quad \dfrac{12-a}{12} = \dfrac{a/\sqrt{2}}{6\sqrt{2}},$ откуда $a = 6.$

5) $V_{куба} = a^3 = 6^3 = 216.$

**Ответ: 216.**

5

**Площадь основания конуса равна площади поверхности вписанного в него шара. Найдите радиус шара, если образующая конуса равна 10.**




**Решение.**

1) Обозначим радиус шара $r$, а радиус основания конуса $R$.

2) По условию $S_{осн.конуса} = S_{шара}$, т.е.

$\pi R^2 = 4\pi r^2, \ R = 2r.$

3) $\Delta\, SP_1O_1 \backsim \Delta SOP$ ($\angle P_1 = \angle O = 90°$, $\angle S$ – общий),

$\dfrac{O_1P_1}{OP} = \dfrac{SO_1}{SP}, \quad \dfrac{r}{2r} = \dfrac{SO_1}{10},$ откуда $SO_1 = 5$,

коэффициент подобия треугольников $k = ½$.

4) Заметим, что $PP_1 = 2r$, $SP_1 = 10 - 2r$, $SO = 5 + r$.

5) Тогда $\dfrac{SP_1}{SO} = \dfrac{1}{2}, \quad \dfrac{10-2r}{5+r} = \dfrac{1}{2},$ откуда $r = 3.$

**Ответ: 3.**

# Решение задач из учебника

**Задача 517.** Докажите, что площадь сферы равна площади полной поверхности конуса, высота которого равна диаметру сферы, а диаметр основания равен образующей конуса.

Решение.

1) Осевое сечение конуса есть равносторонний треугольник $ABC$ (рис. 5.11). Обозначим длину отрезка $AD$ через $r$, тогда $AB=2r$, $BD=r\sqrt{3}$.

2) По условию $R=\frac{BD}{2}=\frac{r\sqrt{3}}{2}$, где $R$ — радиус сферы.

3) Вычисляем площади полной поверхности конуса и сферы:

$$S_{\text{кон}}=\pi r\cdot 2r+\pi r^2=3\pi r^2,\ S_{\text{сферы}}=4\pi R^2=4\pi\cdot\frac{3r^2}{4}=3\pi r^2.$$

Итак, $S_{\text{сферы}}=S_{\text{кон}}$.

**Задача 546.** В усечённый конус, радиусы оснований которого равны $r$ и $r_1$, вписан шар. Найдите отношение объёмов усечённого конуса и шара.

Решение.

1) Осевое сечение усечённого конуса, в который вписан шар, изображено на рисунке 5.12. Пусть $CE=r_1$, $KD=r$, тогда $CM=r_1$, $DM=r$, $DC=r+r_1$.

2) Проведём $CF\perp KD$, тогда $FD=r-r_1$. Из $\triangle CDF$ находим:

$$CF=\sqrt{(r+r_1)^2-(r-r_1)^2}=2\sqrt{rr_1}.$$

3) Найдём радиус шара: $R=\frac{EK}{2}=\frac{CF}{2}=\sqrt{rr_1}$. Используя формулы объёмов усечённого конуса и шара, получаем

$$\frac{V_{\text{усеч. кон}}}{V_{\text{шара}}}=\frac{\frac{1}{3}\pi\cdot 2\sqrt{rr_1}(r^2+rr_1+r_1^2)}{\frac{4}{3}\pi(\sqrt{rr_1})^3}=\frac{r^2+rr_1+r_1^2}{2rr_1}.$$

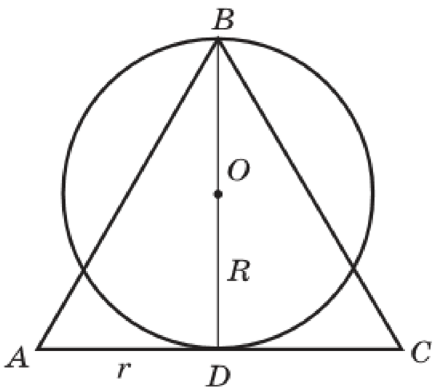


Рис. 5.11

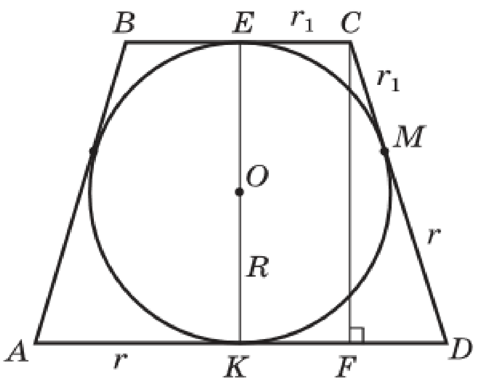


Рис. 5.12